

UNTERSUCHUNG ZU BEZIEHUNGEN ZWISCHEN DEN FIBONACCI-ZAHLEN UND DER MUSIK

Corinna Brinkmann
Leckingser Str. 149
58640 Iserlohn
Fax: 02371 / 944478, E-Mail: klaus.brinkmann@fernuni-hagen.de

INHALTSVERZEICHNIS

1 EINLEITUNG.....	2
2 FIBONACCI UND DIE FIBONACCI-ZAHLEN.....	2
3 FIBONACCI-ZAHLEN IN DER MUSIK.....	3
3.1 FIBONACCI-ZAHLEN IN DER PENTATONIK	3
3.2 FIBONACCI-ZAHLEN IN DEN KIRCHENTONARTEN.....	4
3.3 FIBONACCI-ZAHLEN IN DER HARMONIELEHRE.....	5
3.4 FIBONACCI-ZAHLEN IN DER PYTHAGOREISCHEN STIMMUNG	6
3.5 FIBONACCI-ZAHLEN IN KEPLERS SPHÄRENMUSIK.....	6
3.6 FIBONACCI-ZAHLEN IN EULERS ZAHLENUORDNUNGEN ZU TÖNEN	8
3.7 FIBONACCI-ZAHLEN IN DER CHROMATISCHEN TONLEITER.....	8
4 KLASSIFIZIERUNG VON KONSONANZGRADEN MIT HILFE VON FIBONACCI-ZAHLEN.....	9
5 ZUSAMMENFASSUNG DER ERGEBNISSE UND AUSBLICK	15
6 QUELLEN.....	15

1 EINLEITUNG

In der Vergangenheit gab es immer wieder Mathematiker, die mathematische Gesetzmäßigkeiten in der Musik aufdeckten. Bemerkenswert ist, dass hierbei die Fibonacci-Zahlen wenig Beachtung fanden. Dabei ist es relativ naheliegend, zu versuchen, musikalische Gesetzmäßigkeiten durch Fibonacci-Zahlen zu umschreiben, da die Musik durch Harmonie gekennzeichnet ist, ähnlich wie die Natur, in der sich mit diesen Zahlen doch auch vieles beschreiben lässt.

In der vorliegenden Arbeit wird zunächst kurz in die Thematik der Fibonacci-Zahlen eingeführt. Es werden einige Zusammenhänge von Mathematik und Musik dargestellt, welche von berühmten historischen Mathematikern wie z.B. PYTHAGORAS, KEPLER und EULER aufgedeckt wurden, und gezeigt, wo sich in diesem Altbekannten Fibonacci-Zahlen verbergen. Des Weiteren habe ich dargestellt, wo ich in verschiedenen Bereichen der Musik - wie in verschiedenen Tonsystemen und der Harmonielehre – Beziehungen zu Fibonacci-Zahlen entdeckt habe.

Als wesentlichen Teil der Arbeit stelle ich ein von mir entwickeltes System vor, mit dem sich die verschiedenen Intervalle in der Musik durch Fibonacci-Zahlen umschreiben, in Konsonanzklassen einteilen und gemäß ihrem Wohlklang vollständig ordnen lassen. Diese Ordnung der Intervalle weist keine wesentlichen Unterschiede von der durch EULER vorgenommenen Konsonanzgradeinteilung der Intervalle auf, sie hat jedoch den Vorzug, ausdifferenzierter zu sein.

2 FIBONACCI UND DIE FIBONACCI-ZAHLEN

LEONARDO VON PISA, besser bekannt unter dem Namen **FIBONACCI**, wurde ca. 1170 in Pisa geboren und starb dort um ca. 1240.

1202 erscheint sein „*Liber Abbaci*“. In diesem Buch findet sich in der Abteilung *Unterhaltungsmathematik* folgende Problemstellung, welche als Kaninchenaufgabe bekannt wurde:

Jemand sperrt ein Paar Kaninchen in ein überall mit einer Mauer umgebenes Gehege, um zu erfahren, wie viele Nachkommen dieses Paar innerhalb eines Jahres haben werde, vorausgesetzt, dass es in der Natur der Kaninchen liege, dass sie in jedem Monat ein anderes Paar zur Welt bringen und dass sie im zweiten Monat nach ihrer Geburt selbst gebären... [2].

Leonardo beschreibt ausführlich, wie sich die Anzahl der Kaninchenpaare Monat für Monat berechnen lässt, endet mit dem zwölften Monat und bemerkt abschließend, dass man so bis zu einer unendlichen Anzahl von Monaten verfahren könnte, d.h. er war sich der rekursiven Erzeugungsweise der Zahl der Kaninchenpaare bewusst. Eine formelmäßige Darstellung der Lösung dieses Problems taucht jedoch erst 400 Jahre später bei **ALBERT GIRARD** (1595 - 1632) auf. Dieses Kaninchenproblem führt auf die **Fibonacci-Zahlenfolge**.

Für die *Fibonacci-Zahlenfolge* lässt sich folgende Rekursionsvorschrift aufstellen:

Die Anzahl der im Monat $(k + 1)$ lebenden Kaninchenpaare wird mit f_{k+1} bezeichnet. Im Monat $(k + 1)$ leben alle Paare des Vormonats, also f_k Paare; hinzu kommen die im Monat $(k + 1)$ geborenen Paare, nämlich f_{k-1} .

Es gilt also:

$$f_{k+1} = f_k + f_{k-1} \quad , \text{ für } k \geq 2 \quad (1)$$

Weiterhin gelten die Startwerte $f_1 = f_2 = 1$ [2].

Somit erhält man für die ersten k natürlichen Zahlen folgende Fibonacci-Zahlen f_k :

k	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
f_k	1	1	2	3	5	8	13	21	34	55	89	144	233	377	610

Tabelle 1: Fibonacci-Zahlen

Fibonacci-Zahlen kommen nicht nur in verschiedenen Gebieten der Mathematik, wie der Zahlentheorie, der Geometrie und der Numerik vor, sondern sind auch in der **Natur** sowie auch in der **Kunst** zu finden.

3 FIBONACCI-ZAHLEN IN DER MUSIK

In der Vergangenheit wurde immer wieder versucht, Mathematik und Musik zu verbinden bzw. Elemente der Musik und insbesondere Töne auf mathematische Weise darzustellen. Doch ausgerechnet den Fibonacci-Zahlen, welche doch so sehr geeignet sind, Harmonisches, Schönes in der Natur und auch Beziehungen in der Kunst zu beschreiben, wurde im Hinblick auf einen möglichen Zusammenhang zur Musik wenig Beachtung geschenkt. Dabei gibt es auch hier ganz offensichtliche Bezüge zu Fibonacci-Zahlen. In diesem Kapitel stelle ich Relationen zu Fibonacci-Zahlen in einigen Bereichen der Musik dar, welche ich entdeckt habe.

3.1 Fibonacci-Zahlen in der Pentatonik

Verschiedene Fibonacci-Zahlen konnte ich z.B. in der **Pentatonik** finden. Mit Pentatonik bezeichnet man ein Tonsystem, für das eine *fünfstufige* Tonleiter charakteristisch ist. Man unterscheidet zwischen der anhemitonischen Pentatonik, einer Tonreihe ohne Halbtöne, so z.B. c-d-e-g-a, und der vor allem in Japan vertretenen hemitonischen Pentatonik, in der auch Halbtöne enthalten sind, so z.B. e-f-a-h-c [6]. Die Intervalle zwischen den einzelnen Tönen lassen sich durch Fibonacci-Zahlen beschreiben.

Im Folgenden habe ich alle *Intervalle, die sich durch Fibonacci-Zahlen darstellen lassen*¹, fett und kursiv hervorgehoben. In Tabelle 2 ist dies bei allen Intervallen möglich.

	INTERVALL	BEZEICHNUNG
antihemitonisch:	c-d	<i>gr. Sekunde</i>
	d-e	<i>gr. Sekunde</i>
	e-g	<i>kl. Terz</i>
	g-a	<i>gr. Sekunde</i>
	a-c	<i>kl. Terz</i>
hemitonisch:	e-f	<i>kl. Sekunde</i>
	f-a	<i>gr. Terz</i>
	a-h	<i>gr. Sekunde</i>
	h-c	<i>kl. Sekunde</i>
	c-e	<i>gr. Terz</i>

Tabelle 2: Pentatonik

3.2 Fibonacci-Zahlen in den Kirchentonarten

Auch bei den verschiedenen *Kirchentonarten* treten Fibonacci-Zahlen auf. Diese mittelalterlichen Tonskalen haben *Oktavumfang*.

Über die Zugehörigkeit einer Melodie zu einer der Kirchentonarten entscheiden u.a.: der Schlußton (*Finalis*) und der Deklamationston, der mit der Finalis ein für das Melodienmodell maßgebendes Intervall (*Repercussio*) bildet [6].

Auffällig ist, dass hier 9 Intervalle auftreten, die sich durch Fibonacci-Zahlen beschreiben lassen und nur 3, bei denen dies nicht möglich ist; also ein Verhältnis von 9:3. Beachtenswert ist hierbei, dass es in der Musik von den insgesamt 8 verschiedenen in einer Oktave existierenden Intervallen 5 Intervalle gibt, die sich durch Fibonacci-Zahlen beschreiben lassen und 3, die keinen direkten Bezug zu den Fibonacci-Zahlen aufweisen; wobei sich also hierfür ein Verhältnis von 5:3 ergibt.

Es zeigt sich somit, dass die Intervalle, die durch Fibonacci-Zahlen beschreibbar sind häufiger für Kirchtonarten verwendet werden, als andere.

NAME	TONUMFANG	FINALIS	REPERCUSSIO	INTERVALL
Dorisch	d-d ¹	d	d-a	<i>Quinte</i>
Hypodorisch	A-a	d	d-f	<i>kl. Terz</i>
Phrygisch	e-e ¹	e	e- c ¹	Sexte
Hypophrygisch	H-h	e	e-a	Quarte
Lydisch	f-f ¹	f	f- c ¹	<i>Quinte</i>
Hypolydisch	c-c ¹	f	f-a	<i>gr. Terz</i>
Mixolydisch	g-g ¹	g	g-d ¹	<i>Quinte</i>
Hypomixolydisch	d-d ¹	g	g- c ¹	Quarte
Äolisch	a-a ¹	a	a-e	<i>Quinte</i>
Hypoäolisch	e-e ¹	a	a-c	<i>kl. Terz</i>

¹ Prime entspricht der Zahl 1, Sekunde der Zahl 2, Terz der Zahl 3, Quarte der Zahl 4, Quinte der Zahl 5, Sexte der Zahl 6, Septime der Zahl 7 und Oktave der Zahl 8.

Ionisch	c ¹ -c ²	c ¹	c ¹ -g	Quinte
Hypoionisch	g-g ¹	c ¹	c-e ¹	gr. Terz

Tabelle 3: Kirchentonarten

3.3 Fibonacci-Zahlen in der Harmonielehre

Die wichtigsten Intervalle der Harmonielehre sind die *Prime*, die *Terz*, die *Quinte*, und die *Oktave*. Im *Quintenzirkel* beträgt der Abstand der Grundtöne jeweils eine *Quinte*. Nach dem Quintenzirkel gelangt man somit vom C aus zur nächsten Dur-Tonart, indem man eine *Quinte* aufwärts geht und zur nächsten moll-Tonart indem man eine *Quinte* abwärts geht (dies entspricht der Quarte). Die Dominante einer Tonart erhält man, wenn man eine *Quinte* aufwärts geht, die Subdominante wenn man eine *Quinte* abwärts geht, die Tonicaparallele erhält man, indem man vom Grundton eine *Terz* abwärts geht, die Dominant- sowie Subdominantparallelen erhält man, indem man von der Tonicaparllelen eine *Quinte* nach oben bzw. unten geht [6].

Sämtliche möglichen Intervalle in unserem Tonsystem lassen sich durch Fibonacci-Zahlen beschreiben; entweder direkt oder als Komplementärintervall von einem, das durch Fibonacci-Zahlen beschrieben werden kann: die *Prime*, die *Sekunde*, die *Terz*, die *Quinte*, die *Oktave* können direkt beschrieben werden; die *Quarte* ist das Komplementärintervall der *Quinte*, die *Sexte* das der *Terz* und die *Septime* das der *Sekunde*.

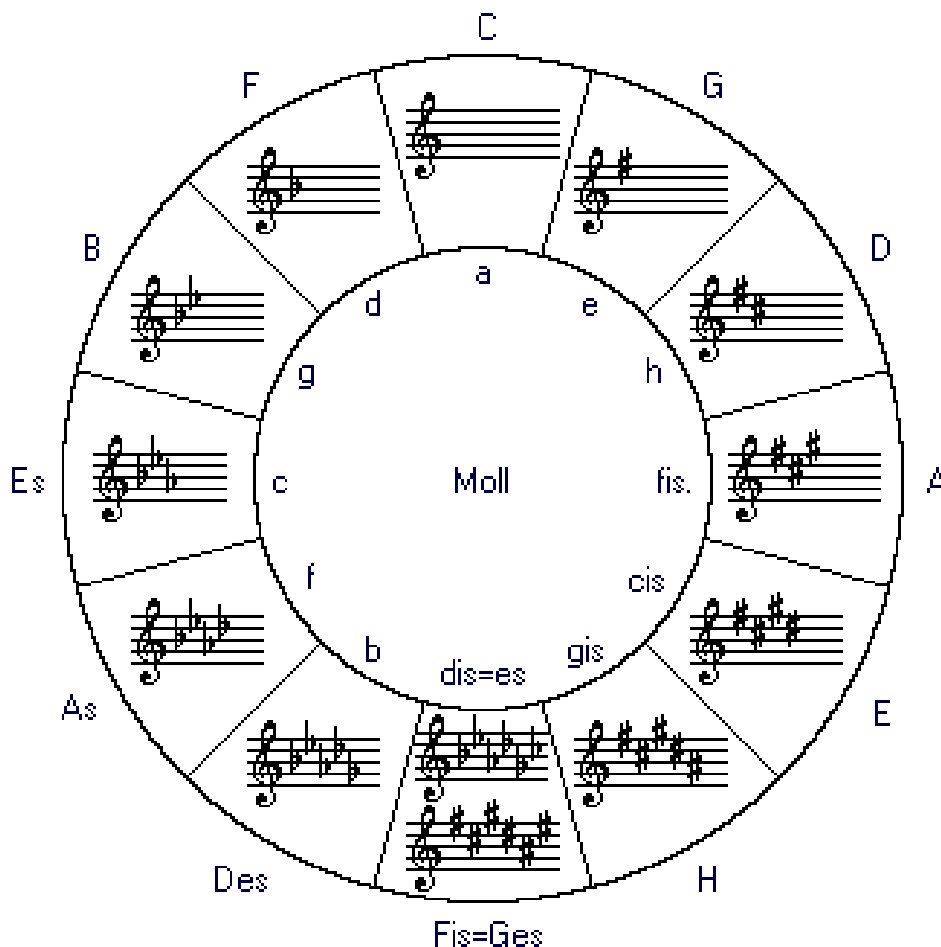


Abb. 1: Quintenzirkel

3.4 Fibonacci-Zahlen in der Pythagoreischen Stimmung

Schon **PYTHAGORAS** stellte fest, dass Töne in mathematischen Verhältnissen ausgedrückt werden können. Die **pythagoreische Stimmung** wurde am Monochord, einem Resonanzkasten, über dem eine Saite gespannt ist, entwickelt. Auf dieser Saite bezeichnet das Längenverhältnis 1:2 die Oktave, 2:3 die Quinte und 3:4 die Quarte. Diese Beziehungen sind, wie auch **PYTHAGORAS** wusste, auch auf Metallstücke und Flöten zu übertragen. Die weiteren Töne ergeben sich durch Saitenteilungen in einer Relation von 2:3 (Quinte). Man kann sie durch entsprechende Multiplikation mit 2 (Oktavsprung) in einen Oktavausschnitt zwischen 1 und 2 einordnen [1].

*Die Relationen der Saitenteilungen entsprechen den **Proportionen der Schwingungszahlen** von Tonintervallen und bestimmen ihren Verwandtschaftsgrad.*

Ordnet man diesen Proportionen moderne Tonbezeichnungen zu und beginnt mit der Bezeichnung c_n für das Verhältnis 1:1, so erhält man für eine Oktave folgende Tabelle [1]:

Tonbezeichnung	c_n	d_n	e_n	f_n	g_n	a_n	b_n	h_n	c_{n+1}
Proportion	$\frac{1}{1}$	$\frac{8}{9}$	$\frac{64}{81}$	$\frac{3}{4}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{16}{27}$	$\frac{9}{16}$	$\frac{128}{243}$	$\frac{1}{2}$

Tabelle 4: Die pythagoreische Stimmung

Bei der Untersuchung der Proportionen der pythagoreischen Stimmung, stellte ich fest, dass sich diese alle als Verhältnisse von Produkten von Potenzen von Fibonacci-Zahlen (1, 2 und 3) darstellen lassen.

c_n	d_n	e_n	f_n	g_n	a_n	b_n	h_n	c_{n+1}
$\frac{1}{1}$	$\frac{8}{9} = \frac{2^3}{3^2}$	$\frac{64}{81} = \frac{2^6}{3^4}$	$\frac{3}{4} = \frac{3}{2^2}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{16}{27} = \frac{2^4}{3^3}$	$\frac{9}{16} = \frac{3^2}{2^4}$	$\frac{128}{243} = \frac{2^7}{3^5}$	$\frac{1}{2}$

Tabelle 5: Fibonacci-Zahlen in der pythagoreischen Stimmung

3.5 Fibonacci-Zahlen in Keplers Sphärenmusik

JOHANNES KEPLER veröffentlichte 1619 in seinem Werk „*Harmonices Mundi*“ eine Beschreibung der Sphärenmusik nach exakten Gesetzen, sowie ihre musikalische Notierung. Auch er verband Zahlenverhältnisse mit Musik, speziell im astronomischen Bereich [7].²

KEPLER ordnete jedem Planeten eine relative Umlaufgeschwindigkeit zu und anhand dieser jedem Planeten einen eigenen Ton. Planeten bewegen sich auf Ellipsenbahnen und befinden sich somit mal im Perihel (in Sonnennähe) und mal im Aphel (in Sonnenferne). **KEPLER**

² Auch heutzutage gibt es Mathematiker, die sich mit den Zusammenhängen zwischen Mathematik und Musik auch im Hinblick auf die Astronomie beschäftigen. Prof. Dr. Günter Bergmann komponierte 1980 eine Orgelmusik, die den Lauf von vier Monden des Jupiter beschreibt. Freundlicherweise stellte mir Frau Bergmann, als sie von meiner Arbeit hörte, verschiedene Materialien aus dem Nachlass ihres Mannes zur Verfügung.

berechnete nach den Verhältnissen der Perihel- und Aphelgeschwindigkeiten zu jedem Planeten die zugehörigen Intervalle [1].

Planet	Erde	Mars	Saturn	Jupiter	Venus	Merkur
Proportion	$\frac{27}{28}$	$\frac{5}{6}$	$\frac{9}{10}$	$\frac{9}{10}$	$\frac{80}{81}$	$\frac{3}{4}$

Tabelle 6: KEPLERS Zuordnung von Proportionen zu einzelnen Planeten

Die Verhältnisse der Aphel- und Perihelgeschwindigkeiten zwischen den Planeten entsprechen den folgenden Tonintervallen [1]:

<i>Planet im Aphel</i>	<i>Planet im Perihel</i>	<i>Verhältnis</i>	<i>Intervall</i>
Saturn	Jupiter	1:3	Oktave + Quinte
Jupiter	Saturn	2:1	Oktave
Jupiter	Mars	1:8	drei Oktaven
Mars	Jupiter	24:5	zwei Oktaven + kl. Terz
Mars	Erde	5:12	Oktave + kl. Terz
Erde	Mars	3:2	Quinte
Erde	Venus	3:5	gr. Sexte
Venus	Erde	8:5	kl. Sexte
Venus	Merkur	1:4	zwei Oktaven
Merkur	Venus	5:3	gr. Sexte

Tabelle 7: Verhältnis der Aphel- und Perihelgeschwindigkeiten zweier Planeten nach KEPLER

Die Proportionen, die KEPLER für seine Zuordnung von Intervallen zu den Verhältnissen der Perihel- und Aphelgeschwindigkeiten zwischen zwei Planeten verwendete, konnte ich ebenfalls durch Verhältnisse von Fibonacci-Zahlen, bzw. von Produkten aus Fibonacci-Zahlen darstellen.

Planet im Aphel	Planet im Perihel	Verhältnis	Intervall
Saturn	Jupiter	$\frac{1}{3}$	Oktave + Quinte
Jupiter	Saturn	$\frac{1}{2}$	Oktave
Jupiter	Mars	$\frac{1}{8}$	drei Oktaven
Mars	Jupiter	$\frac{5}{24} = \frac{5}{3 \cdot 8}$	zwei Oktaven + kl. Terz
Mars	Erde	$\frac{5}{12} = \frac{5}{3 \cdot 2^2}$	Oktave + kl. Terz
Erde	Mars	$\frac{2}{3}$	Quinte
Erde	Venus	$\frac{3}{5}$	gr. Sexte
Venus	Erde	$\frac{5}{8}$	kl. Sexte
Venus	Merkur	$\frac{1}{4} = \frac{1}{2^2}$	zwei Oktaven
Merkur	Venus	$\frac{3}{5}$	gr. Sexte

Tabelle 8: Fibonacci-Zahlen in KEPLERS Zuordnung von Intervallen zu Planeten

3.6 Fibonacci-Zahlen in Eulers Zahlenzuordnungen zu Tönen

Auch **LEONHARD EULER** beschäftigte sich mit Zusammenhängen zwischen Mathematik und Musik, speziell mit musikalischer Harmonie. Er ordnete jedem Ton eine bestimmte Zahl zu, die er aus Potenzen der Zahlen **2, 3, 5** zusammensetzte. Für einen Quintsprung multiplizierte er mit **3**, für einen Terzsprung mit **5** für einen Oktavsprung mit **2**. Er erhielt folgende Zahlenzuordnungen zu den entsprechenden Tönen [1]:

f	fis	g	Gis	a	b	h	c	cis	d	dis	e	f ₁
$3^0 \cdot 5^0$	$3^3 \cdot 5^1$	3^2	$3 \cdot 5^2$	5	$3^3 \cdot 5^2$	$3^2 \cdot 5$	3	5^2	3^3	$3^2 \cdot 5^2$	$3 \cdot 5$	2

Tabelle 9: Zahlenzuordnungen zu Tönen nach EULER

Bei Eulers Zahlenzuordnungen ist die Möglichkeit, jede Zahl, die er einem Ton zuordnete, als Produkt aus Fibonacci-Zahlen darzustellen, besonders offensichtlich, da er alle Zahlen, die er Tönen zuordnete, aus Potenzen der Zahlen **2, 3, 5**, also aus Fibonacci-Zahlen, zusammensetzte.

3.7 Fibonacci-Zahlen in der chromatischen Tonleiter

In der chromatischen Tonleiter wird der Terz viel mehr Bedeutung zugemessen als zuvor. Sie wurde von den Pythagoreern noch nicht als konsonant angesehen, da sie durch relativ große Zahlenverhältnisse (27:32 für die kleine, 64:81 für die große Terz) beschrieben wurde. Erst im 12. Jahrhundert begann man, der Terz mehr Aufmerksamkeit zu schenken. Es wurde festgestellt, dass die pythagoreischen Terzwerte den kleineren Zahlenverhältnissen 5:6 für die kleine und 4:5 für die große Terz sehr nahe kamen. Später wurden dann zur Konstruktion der **quint-terz-oktav-reinen** Stimmung (auch: **chromatische Stimmung**) die Relationen 1:2 für die Oktave, 2:3 für die Quinte und 3:4 für die Quarte übernommen und zusätzlich die reine Terz mit 4:5 eingeführt.

Somit entspricht nun ein Schritt in Oktavrichtung der Multiplikation mit $\frac{1}{2}$, ein Schritt in Quintrichtung der Multiplikation mit $\frac{2}{3}$, einer in Terzrichtung der Multiplikation mit $\frac{4}{5}$. Damit ergibt sich für einen Oktavausschnitt auf dem Grundton c_n folgende Tabelle [1]:

c_n	cis_n	des_n	d_n	dis_n	es_n	e_n	f_n	fis_n	g_n	gis_n	as_n	a_n	b_n	h_n	c_{n+1}
$\frac{1}{1}$	$\frac{24}{25}$	$\frac{15}{16}$	$\frac{8}{9}$	$\frac{64}{75}$	$\frac{5}{6}$	$\frac{4}{5}$	$\frac{3}{4}$	$\frac{32}{45}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{16}{25}$	$\frac{5}{8}$	$\frac{3}{5}$	$\frac{5}{9}$	$\frac{8}{15}$	$\frac{1}{2}$

Tabelle 10: Quint-terz-oktav-reine Stimmung

Hierbei werden Tönen, die im Sinne der Wohltemperierung gleich sind (wie cis und des, sowie dis und es oder auch gis und as) unterschiedliche Proportionen zugeordnet. Diese liegen jedoch sehr nahe beieinander, d.h. die Töne klingen ähnlich. Heutzutage ordnet man üblicherweise diesen Tönen die gleichen Proportionen zu, wie in der folgenden Tabelle gezeigt wird.

c_n	cis_n des_n	d_n	dis_n es_n	e_n	f_n	fis_n	g_n	gis_n as_n	a_n	b_n	h_n	c_{n+1}
$\frac{1}{1}$	$\frac{15}{16}$	$\frac{8}{9}$	$\frac{5}{6}$	$\frac{4}{5}$	$\frac{3}{4}$	$\frac{32}{45}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{5}{8}$	$\frac{3}{5}$	$\frac{5}{9}$	$\frac{8}{15}$	$\frac{1}{2}$

Tabelle 11: Reine Stimmung

Auch die Proportionen der quint-terz-oktav-reinen Stimmung und damit natürlich auch der reinen Stimmung, konnte ich als Verhältnisse von Produkten aus Fibonacci-Zahlen darstellen.

c_n	cis_n	des_n	d_n	dis_n	es_n	e_n	f_n	fis_n	g_n	gis_n	as_n	a_n	b_n	h_n	c_{n+1}
$\frac{1}{1}$	$\frac{24}{25} = \frac{3 \cdot 8}{5^2}$	$\frac{15}{16} = \frac{3 \cdot 5}{2 \cdot 8}$	$\frac{8}{9} = \frac{8}{3^2}$	$\frac{64}{75} = \frac{8^2}{3 \cdot 5^2}$	$\frac{5}{6} = \frac{5}{2 \cdot 3}$	$\frac{4}{5} = \frac{2^2}{5}$	$\frac{3}{4} = \frac{3}{2^2}$	$\frac{32}{45} = \frac{8 \cdot 2^2}{5 \cdot 3^2}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{16}{25} = \frac{2 \cdot 8}{5^2}$	$\frac{5}{8}$	$\frac{3}{5}$	$\frac{5}{9} = \frac{5}{3^2}$	$\frac{8}{15} = \frac{8}{3 \cdot 5}$	$\frac{1}{2}$

Tabelle 12: Fibonacci-Zahlen in der quint-terz-oktav-reinen Stimmung

4 KLASIFIZIERUNG VON KONSONANZGRADEN MIT HILFE VON FIBONACCI-ZAHLEN

Im 18. Jahrhundert versuchte EULER die **Konsonanz**, den zentralen Begriff der Harmonielehre mathematisch auszudrücken.

Als konsonant werden Intervalle bezeichnet, die als wohlklingend empfunden werden und nicht nach Auflösung in einen anderen Klang drängen; im Gegensatz hierzu werden Intervalle, die spannungsvoll empfunden werden, als dissonant bezeichnet [4].

Als ein Kriterium für den **Konsonanzgrad** gilt die Einfachheit der Proportionen. Dafür führte EULER seine „gradus-suavitatis-Funktion“ Γ ein, die jedem Zahlenverhältnis $\frac{x}{y}$ mit

$x, y \in \mathbb{N}$ einen Wert $\Gamma\left(\frac{x}{y}\right)$ zuordnet, der den Konsonanzgrad des dem Zahlenverhältnis entsprechenden Intervalls angibt [1].

EULER benutzt zur Definition der Funktion Γ , dass sich jede positive ganze Zahl a in der Form

$$a = p_1^{e_1} \cdot p_2^{e_2} \cdot \dots \cdot p_n^{e_n} \quad (2)$$

darstellen lässt, wobei $p_1 < p_2 < \dots < p_n$ eine wachsende Primzahlfolge ist und e_1, e_2, \dots, e_n positive ganze Zahlen sind.

EULER setzt nun $\Gamma\left(\frac{x}{y}\right) = \Gamma(x \cdot y)$, wenn $\left(\frac{x}{y}\right)$ ein positiver gekürzter Bruch ist.

Mit $x \cdot y = a$ und a in o.a. Darstellungsweise lautet dann seine „gradus-suavitatis-

Funktion“:

$$\Gamma(a) = 1 + \sum_{k=1}^n e_k (p_k - 1) \quad (3)$$

In diese Funktion setzte EULER die Frequenzverhältnisse der reinen Stimmung ein und konnte somit den Konsonanzgrad von Frequenzproportionen mit ganzen, natürlichen Zahlen beschreiben; je kleiner der Konsonanzgrad, desto wohlklingender ist das zugehörige Intervall. Es ergibt sich folgende Zuordnung von Frequenzproportionen zu Konsonanzgraden [1]:

Konsonanzgrad	Proportionen	Intervall
1	1:1	Prime
2	1:2	Oktave
3	1:3	Oktave + Quinte
	1:4	2 Oktaven
4	2:3	Quinte
	1:6	2 Oktaven + Quinte
	1:8	3 Oktaven
5	3:4	Quarte
6	2:5	2 Oktaven + Terz
	2:9	2 Oktaven + gr. Sekunde
7	3:5	gr. Sexte
	4:5	gr. Terz
	4:9	Oktave + gr. Sekunde
8	5:6	kl. Terz
	5:8	kl. Sexte
	8:9	gr. Sekunde
9	5:9	kl. Septime
10	8:15	gr. Septime
13	15:16	kl. Sekunde
14	32:45	Tritonus

Tabelle 13: Zuordnung von Frequenzproportionen zu Konsonanzgraden nach EULER

Da sich Intervalle, wie oben aufgezeigt, durch Fibonacci-Zahlen umschreiben lassen, ist es naheliegend zu versuchen, eine **Klassifizierung von Intervallen entsprechend ihrem Wohlklang mittels der Fibonacci-Zahlen** vorzunehmen.

Ausgegangen bin ich von der Tatsache, dass sich sämtliche **Frequenzverhältnisse der chromatischen Tonleiter** (reine Stimmung), wie oben gezeigt (siehe 3.7), als **Verhältnisse von Produkten aus Fibonacci-Zahlen** darstellen lassen.

Zwecks Zuordnung der verschiedenen Intervalle, gegeben in ihrer Darstellung durch Verhältnisse aus Produkten aus Fibonacci-Zahlen, zu verschiedenen Konsonanz-Klassen, habe ich nach einer geeigneten Funktionsvorschrift gesucht.

Ich habe festgestellt, dass dies gut möglich ist, wenn man alle vorkommenden Fibonacci-Zahlen in ihre Primfaktoren zerlegt, die wiederum Fibonacci-Zahlen sind. Je größer die Summe der Anzahlen der im Zähler und im Nenner vorkommenden Faktoren ist, desto dissonanter klingt ein Intervall.

F sei also eine Funktion, die die Menge P („Menge der Frequenzverhältnisse“) in die Menge \mathbf{N} der natürlichen Zahlen abbildet. Jedes Element von P sei dabei als ein nicht weiter kürzbarer Bruch dargestellt. $F\left(\frac{j}{k}\right)$ bezeichne die Konsonanzklasse, zu der das

Frequenzverhältnis $\frac{j}{k}$ gehört.

Für ein Frequenzverhältnis $\frac{j}{k}$ ($j, k \in \mathbf{N}$; $\frac{j}{k}$ ist positiver nicht weiter kürzbarer Bruch) setze ich nun in Anlehnung an EULERS Darstellung:

$$F\left(\frac{j}{k}\right) = F(jk), \quad (4)$$

$j \cdot k =: a$ ist dabei eine natürliche Zahl, die sich somit (für $a \neq 1$) in der Form

$$a = p_1^{e_1} p_2^{e_2} \dots p_n^{e_n}, \quad (5)$$

darstellen lässt, wobei $p_1 < p_2 < \dots < p_n$ eine wachsende Primzahlfolge und e_1, e_2, \dots, e_n positive ganze Zahlen sind.

$$\text{Die Funktionsvorschrift für } F \text{ lautet dann: } F(a) = e_1 + e_2 + \dots + e_n, \text{ für } a \neq 1 \quad (6)$$

$$\text{und } F(1) = 1 \quad (7)$$

Funktionswerte von F erhält man somit, indem man zunächst den Bruch, für den man den zugehörigen Funktionswert berechnen will, so weit wie möglich kürzt, dann das Produkt aus dem Zähler und dem Nenner bildet; dieses in Primfaktoren zerlegt und die Vielfachheiten der jeweiligen Primfaktoren addiert.

Beispiel: Gesucht wird der Konsonanzgrad der Quarte, die durch das Frequenzverhältnis von $\frac{3}{4}$ beschrieben wird.

$$\text{Nach Gleichung (4) gilt: } F\left(\frac{3}{4}\right) = F(3 \cdot 4) = F(12)$$

$$\text{Die Primfaktorzerlegung von 12 ist: } 12 = 2^2 \cdot 3^1$$

$$\text{Mit Gleichung (6) erhält man dann für } F(12): \quad F(12) = 2 + 1 = 3$$

Somit lässt sich der Quarte die Konsonanzklasse **3** zuordnen.

Mit dieser Funktionsvorschrift ordne ich somit den verschiedenen Intervallen auf der Basis von Fibonacci-Zahlen jeweils eine Konsonanzklasse zu. Dabei kann mehreren Intervallen dieselbe Konsonanzklasse zugeordnet sein; sie gehören dann einer **Konsonanzklasse** an.

Innerhalb jeder dieser „**Fibonacci-Konsonanzklassen**“ ordne ich nun die zugehörigen Intervalle nach folgender Regel:

Je kleiner der Zahlenwert für i mit $i = jk$ ist, desto höher ist die Konsonanz des Intervalls mit dem Frequenzverhältnis $\frac{j}{k}$.

Mit dieser Regel ist es nun möglich, jedem Intervall eine „**Fibonacci-Ordnungszahl**“ zuzuordnen, wobei die Konsonanz der Intervalle mit steigender Ordnungszahl abnimmt.

Im Folgenden werde ich mich auf den Umfang von **zwei Oktaven** beschränken.

Die verschiedenen Intervalle, die innerhalb von zwei Oktaven vorkommen, mit ihren Frequenzverhältnissen und den zugehörigen Fibonacci-Konsonanz-Klassen und Fibonacci-Ordnungszahlen, so wie sie sich nach obigen Vorschriften ergeben, sind in der folgenden Tabelle 14 dargestellt.

Proportionen	Intervall	Fibonacci-Konsonanzklasse	Fibonacci-Ordnungszahl
$\frac{1}{1}$	Prime	1	1
$\frac{1}{2}$	Oktave	1	2
$\frac{1}{3}$	Oktave + Quinte	1	3
$\frac{1}{4}$	2 Oktaven	2	4
$\frac{2}{3}$	Quinte	2	5
$\frac{2}{5}$	Oktave + gr. Terz	2	6
$\frac{3}{5}$	gr. Sexte	2	7
$\frac{3}{4}$	Quarte	3	8
$\frac{4}{5}$	gr. Terz	3	9
$\frac{5}{6}$	kl. Terz	3	10
$\frac{3}{10}$	Oktave + gr. Sexte	3	11
$\frac{5}{9}$	kl. Septime	3	12
$\frac{3}{8}$	Oktave + Quarte	4	13
$\frac{4}{9}$	Oktave + gr. Sekunde	4	14
$\frac{5}{8}$	kl. Sexte	4	15
$\frac{5}{12}$	Oktave + kl. Terz	4	16
$\frac{4}{15}$	Oktave + gr. Septime	4	17
$\frac{5}{18}$	Oktave + kl. Septime	4	18
$\frac{8}{9}$	gr. Sekunde	5	19
$\frac{5}{16}$	Oktave + kl. Sexte	5	20
$\frac{8}{15}$	gr. Septime	5	21
$\frac{15}{16}$	kl. Sekunde	6	22
$\frac{15}{32}$	Oktave + kl. Sekunde	7	23
$\frac{16}{45}$	Oktave + Tritonus	7	24
$\frac{32}{45}$	Tritonus	8	25

Tabelle 14: Konsonanzklassen nach einer Zuordnung mit Hilfe von Fibonacci-Zahlen

Um einen Vergleich zwischen meiner Einteilung und der bisher gebräuchlichen nach EULER [1] übersichtlicher gestalten zu können, ordne ich auch den Intervallen mit ihren Konsonanzgraden nach EULER **Ordnungszahlen** zu.

Da bei EULER innerhalb einer Konsonanzklasse alle Intervalle gleichberechtigt sind, kann man hier die Intervalle nicht einfach durchnummerieren. Daher ordne ich Intervallen, bei denen keine eindeutige Zuordnung möglich ist, so viele Ordnungszahlen zu, wie Intervalle zu der entsprechenden Konsonanzklasse gehören; d.h. gehören einer Konsonanzklasse z.B. 3 Intervalle an, so erhält jedes dieser drei Intervalle drei aufeinanderfolgende Ordnungszahlen. Diese Ordnungszahlen nenne ich „**Euler-Ordnungszahlen**“.

Proportionen	Intervall	Konsonanzgrad nach EULER	Euler- Ordnungszahl
$\frac{1}{1}$	Prime	1	1
$\frac{1}{2}$	Oktave	2	2
$\frac{1}{3}$	Oktave + Quinte	3	3,4
$\frac{1}{4}$	2 Oktaven		3,4
$\frac{2}{3}$	Quinte	4	5
$\frac{3}{4}$	Quarte	5	6
$\frac{2}{5}$	Oktave + gr. Terz	6	7,8
$\frac{3}{8}$	Oktave + Quarte		7,8
$\frac{3}{5}$	gr. Sexte	7	9,10,11
$\frac{4}{5}$	gr. Terz		9,10,11
$\frac{4}{9}$	Oktave + gr. Sekunde		9,10,11
$\frac{5}{6}$	kl. Terz	8	12,13,14,15
$\frac{3}{10}$	Oktave + gr. Sexte		12,13,14,15
$\frac{5}{8}$	kl. Sexte		12,13,14,15
$\frac{8}{9}$	gr. Sekunde		12,13,14,15
$\frac{5}{9}$	kl. Septime	9	16,17,18,19
$\frac{5}{12}$	Oktave + kl. Terz		16,17,18,19
$\frac{4}{15}$	Oktave + gr. Septime		16,17,18,19
$\frac{5}{16}$	Oktave + kl. Sexte		16,17,18,19
$\frac{5}{18}$	Oktave + kl. Septime	10	20
$\frac{8}{15}$	gr. Septime	11	21
$\frac{15}{16}$	kl. Sekunde	11	22
$\frac{15}{32}$	Oktave + kl. Sekunde	12	23
$\frac{16}{45}$	Oktave + Tritonus	13	24
$\frac{32}{45}$	Tritonus	14	25

Tabelle 15: Zuteilung von Ordnungszahlen für EULERS Darstellung der Konsonanzgrade

In der folgenden Tabelle 16 werden die verschiedenen Intervalle mit ihren Frequenzverhältnissen und den zugehörigen Fibonacci-Ordnungszahlen sowie Euler-Ordnungszahlen dargestellt.

In dieser Tabelle habe ich für die einzelnen Intervalle die Ordnungszahlen, bei denen die Fibonacci-Ordnungszahl mit einer der zugehörigen Euler-Ordnungszahlen übereinstimmt, **fett** geschrieben, diejenigen, die nur um den Wert 1 voneinander abweichen, **fett und kursiv** und diejenigen, die um den Wert 2 voneinander abweichen *kursiv*.

Proportionen	Intervall	Fibonacci- Ordnungszahl	Euler- Ordnungszahl
$\frac{1}{1}$	Prime	1	1
$\frac{1}{2}$	Oktave	2	2
$\frac{1}{3}$	Oktave + Quinte	3	3,4
$\frac{1}{4}$	2 Oktaven	4	3,4
$\frac{2}{3}$	Quinte	5	5
$\frac{2}{5}$	Oktave + gr. Terz	6	7,8
$\frac{3}{5}$	gr. Sexte	7	<i>9,10,11</i>
$\frac{3}{4}$	Quarte	8	6
$\frac{4}{5}$	gr. Terz	9	9,10,11
$\frac{5}{6}$	kl. Terz	10	<i>12,13,14,15</i>
$\frac{3}{10}$	Oktave + gr. Sexte	11	12,13,14,15
$\frac{5}{9}$	kl. Septime	12	16,17,18,19
$\frac{3}{8}$	Oktave + Quarte	13	7,8
$\frac{4}{9}$	Oktave + gr. Sekunde	14	9,10,11
$\frac{5}{8}$	kl. Sexte	15	12,13,14,15
$\frac{5}{12}$	Oktave + kl. Terz	16	16,17,18,19
$\frac{4}{15}$	Oktave + gr. Septime	17	16,17,18,19
$\frac{5}{18}$	Oktave + kl. Septime	18	20
$\frac{8}{9}$	gr. Sekunde	19	12,13,14,15
$\frac{5}{16}$	Oktave + kl. Sexte	20	16,17,18,19
$\frac{8}{15}$	gr. Septime	21	21
$\frac{15}{16}$	kl. Sekunde	22	22
$\frac{15}{32}$	Oktave + kl. Sekunde	23	23
$\frac{16}{45}$	Oktave + Tritonus	24	24
$\frac{32}{45}$	Tritonus	25	25

Tabelle 16: Vergleich zwischen den Fibonacci-Ordnungszahlen und den Euler-Ordnungszahlen

Es ist zu erkennen, dass meine Einteilung auf der Grundlage von Fibonacci-Zahlen sich nicht wesentlich von der durch EULER vorgenommenen Einteilung unterscheidet.

14 der 25 Werte stimmen exakt überein, weitere 3 weisen nur eine Abweichung um den Wert 1 auf und weitere 4 weichen nur um den Wert 2 voneinander ab, so dass nur vier Werte eine größere Abweichung voneinander aufweisen, als um den Wert 2.

Welche der beiden Einteilungen nun das menschliche Harmonieempfinden eher trifft, hängt von jedem einzelnen Individuum ab, sowie von der Kultur aus der es stammt und von vielen anderen Faktoren.

In jedem Fall stellt meine Einteilung nach den Fibonacci-Zahlen eine Alternative zu EULERS Einteilung dar, vor allem da sie auf Zahlen beruht, die, wie gezeigt, ohnehin eine große Bedeutung in der Musik haben.

Ein wesentlicher Vorzug meiner Einteilung ist, dass hier die Intervalle nicht nur in Konsonanzklassen eingeteilt werden, sondern darüber hinaus auch in einer eindeutigen Reihenfolge nach Konsonanz streng geordnet werden, während bei EULERS System nur eine Klasseneinteilung vorgenommen wird.

5 ZUSAMMENFASSUNG DER ERGEBNISSE UND AUSBLICK

Diese Arbeit zeigt, dass Fibonacci-Zahlen eine große Rolle in der Musik spielen. Man findet sie nicht nur in den verschiedensten Tonsystemen wieder, sondern ihnen kommt auch in Bezug auf die Harmonielehre eine große Bedeutung zu.

Fibonacci-Zahlen finden sich in der pythagoreischen Stimmung, in KEPLERS Sphärenmusik, bei EULERS Zahlenzuordnungen zu Tönen und in der heute in unseren Breitengraden gebräuchlichen quint-terz-oktav-reinen Stimmung.

In der Arbeit wurde darüber hinaus ein von mir entwickeltes System vorgestellt, nach dem, auf der Basis von Fibonacci-Zahlen, jedem Intervall eine Konsonanzklasse und eine Konsonanz-Ordnungszahl zugeordnet werden kann. Die sich daraus ergebende Einteilung der Intervalle weist keine wesentlichen Unterschiede von der durch EULER vorgenommenen Einteilung der Intervalle nach Konsonanzgraden auf, sie ist jedoch ausdifferenzierter.

Interessant wäre es nun, weiterhin zu untersuchen, ob auch bei anderen Kulturen, deren Musik auf anderen Notensystemen basiert, Fibonacci-Zahlen eine Rolle spielen.

Eine weitere Richtung, in der diese Arbeit weiter ausgebaut werden könnte, wäre die Beantwortung der Frage, ob verschiedene Komponisten bewusst oder auch unbewusst Fibonacci-Zahlen in ihren Werken verwendet haben, sei es in der Aufteilung ihrer Musikstücke, oder auch, dass sie vor allem Intervalle verwendeten, die nach meiner Einteilung von „Fibonacci-Konsonanzklassen“ als besonders harmonisch einzuordnen sind.

6 QUELLEN

- [1] Armbrust, Ansgar: *Vom Bambusrohr zur Orgelpfeife*, MNU Jahrgang 52, Heft 2 1999 (S. 76-81).
- [2] Baptist, Peter: *Pythagoras und kein Ende?*, Leipzig 1997.
- [3] Brockhaus Riemann: *Musik Lexikon*, Mainz 1990.
- [4] *dtv-Atlas zur Musik*, München 1994.
- [5] Kuchling, Horst: *Physik Formeln und Gesetze*, Leipzig 1976.
- [6] *Microsoft QuickShelf* 1995, *Meyers Lexikon*.
- [7] Sheldrake, Rupert: *Das Gedächtnis der Natur* (S. 40-43), München 1990.