# Maps als Hilfe beim Problemlösen und beim Modellieren

Astrid Brinkmann, Universität Münster

Vortrag auf der 50. Jahrestagung der GDM in Heidelberg vom 07.03. bis 11.03.2016

# Gliederung

- 1. Graphische Darstellungen mathematischen Wissens in Maps
  - 1.1 Mind Maps
  - 1.2 Concept Maps
  - 1.3 Abgewandelte Map-Formen
- 2. Maps als Hilfe beim (innermathematischen) Problemlösen
  - 2.1 Maps, die Basiswissen für Problemlöseprozesse abbilden
  - 2.2 Maps mit Werkzeugen als Hilfe zum Problemlösen
  - 2.3 Maps als Übersicht über Heurismen zum Problemlösen
- 3. Maps als Hilfe beim Modellieren
  - 3.1 Modellierungsprozess
  - 3.2 Maps als Hilfe beim Mathematisieren
- 4. Methodische Vorgehensweisen
- 5. Ausgearbeitete Unterrichtsmaterialien



# 1 Graphische Darstellungen mathematischen Wissens in Maps

### Mind Maps und Concept Maps

Spezielle Graphen zur Visualisierung der Begriffe (concepts) rund um ein Thema mit ihren Beziehungen untereinander

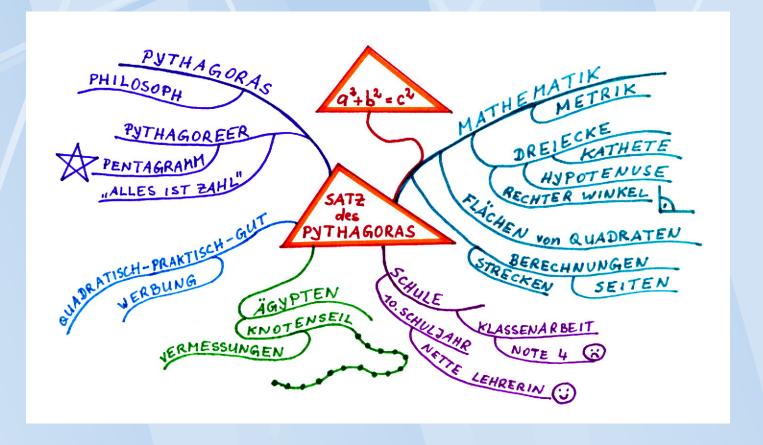
- Mind Mapping (T. Buzan): kreative Denk- und Schreibtechnik
- Concept Mapping (Novak): Aufdeckung kognitiver Strukturen, Erkennen bereits vorhandenen Wissens eines Individuums
- geeignete Mittel zur Repräsentation vernetzten mathematischen Wissens



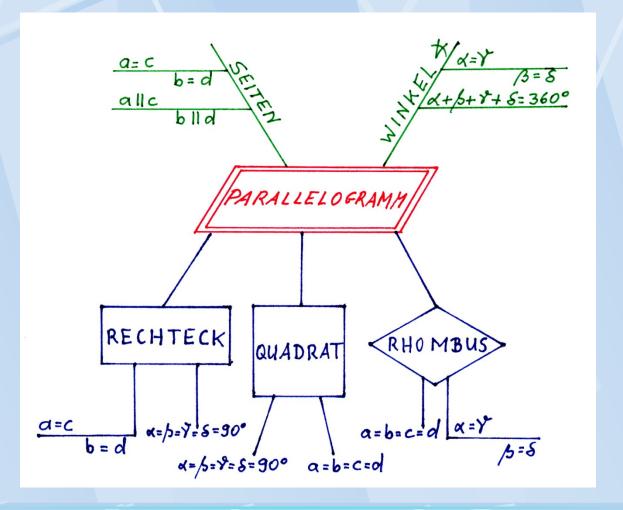
# 1 Graphische Darstellungen mathematischen Wissens in Maps

- Erfolgreiches Problemlösen und Modellieren setzt
   i. d. R. solides, gut strukturiertes und vernetztes mathematisches Basiswissen voraus.
- Maps können einen, zur Aufgabe passenden, Überblick über mathematische Wissensinhalte in ihrem Zusammenhangsgefüge bereitstellen.

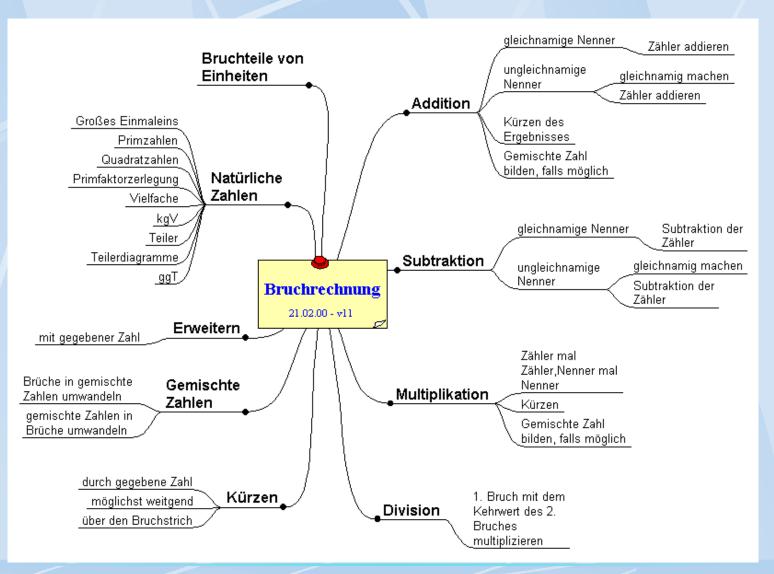


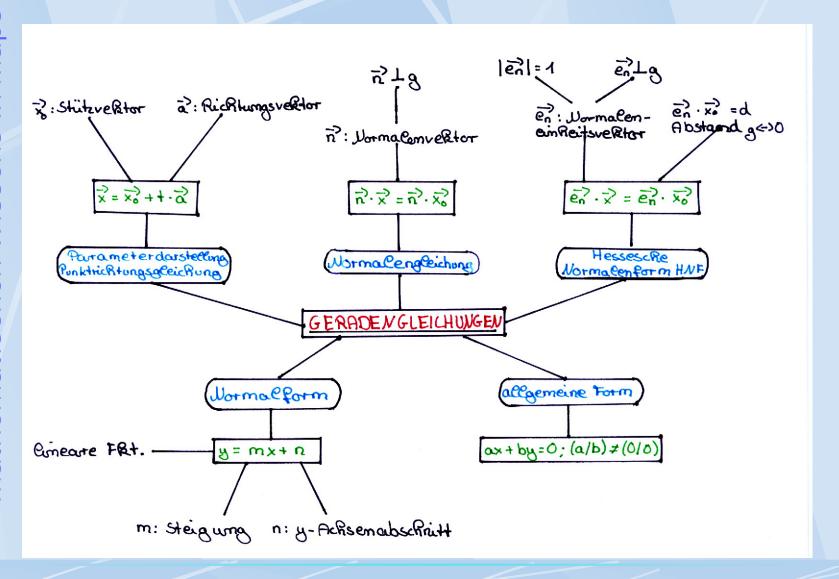




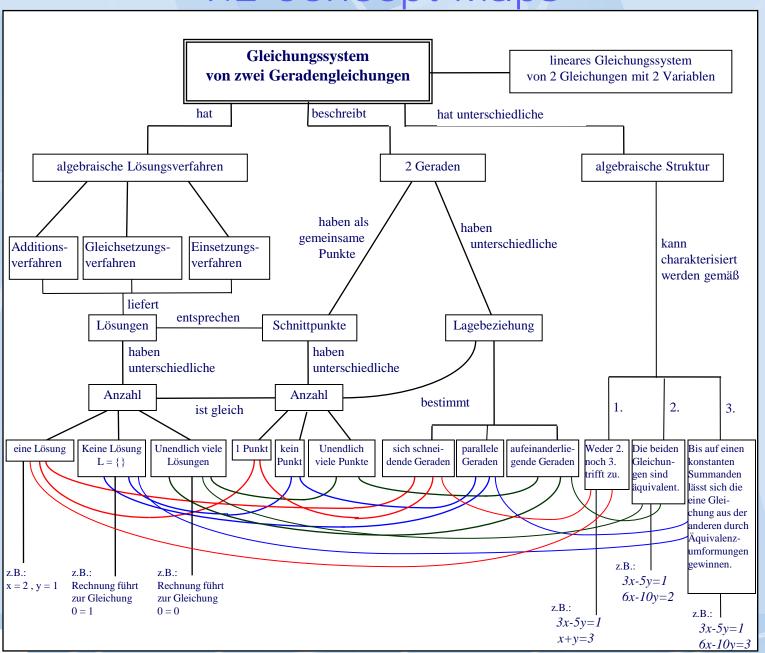




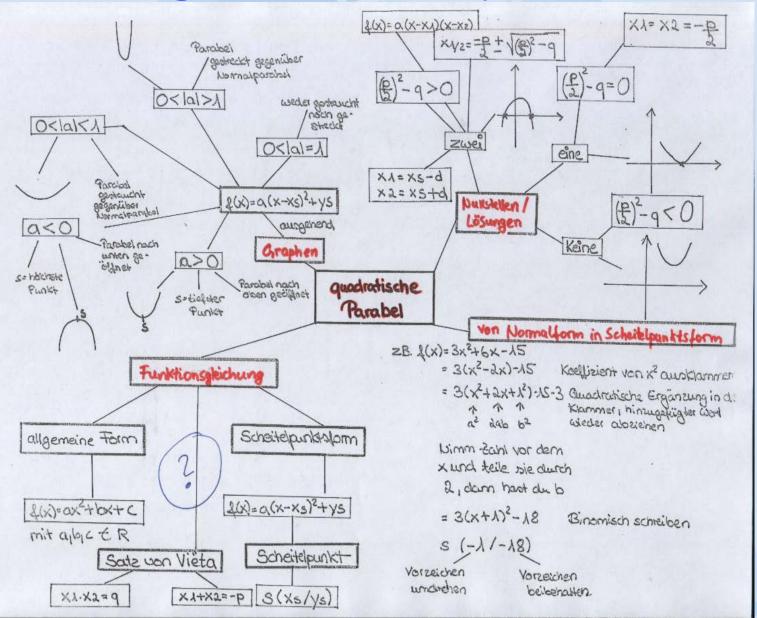




### 1.2 Concept Maps



## 1.3 Abgewandelte Map-Formen





# 2 Maps als Hilfe beim (innermathematischen) Problemlösen

- 2.1 Maps, die Basiswissen für Problemlöseprozesse abbilden
- 2.2 Maps mit Werkzeugen als Hilfe zum Problemlösen
- 2.3 Maps als Übersicht über Heurismen zum Problemlösen

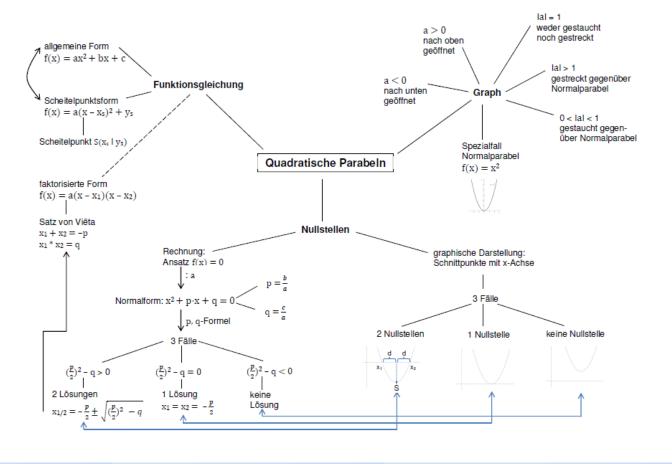


Voraussetzung:

Problemstellungen zu einem eingegrenzten Themengebiet, Map zu diesem Thema



Map zu quadratischen Parabeln:





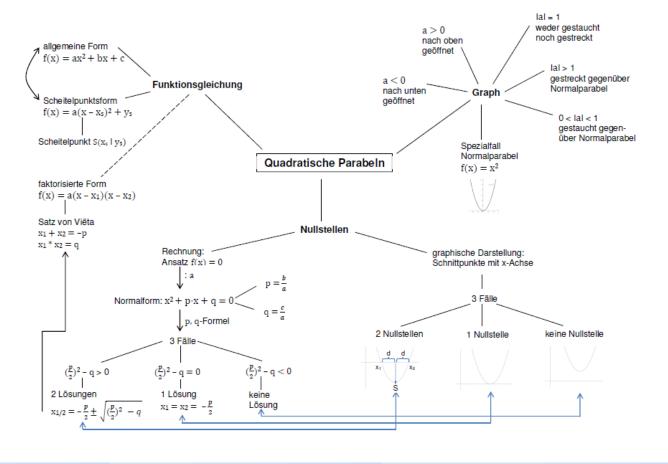
Map als Hilfe beim Problemlösen nutzen, z. B. Thema "quadratische Parabeln:

- 1. Eine Parabel hat den Scheitelpunkt  $S(1 \mid 8)$  und schneidet bei 3 die x-Achse. Wie lautet ihre Funktionsgleichung in der allgemeinen Form?
- 2. Eine Parabel hat die Nullstellen  $x_1 = -4$  und  $x_2 = 2$ . In der allgemeinen Form der Funktionsgleichung hat der Koeffizient a von  $x^2$  den Wert 2. Gib eine Funktionsgleichung für die Parabel an. Gib die Koordinaten des Scheitelpunkts der Parabel an.
- 3. Eine Parabel berührt die *x*-Achse an der Stelle  $x_1 = -3$  und schneidet die *y*-Achse in (0 | 9). Wie lautet die allgemeine Form der Funktionsgleichung?
- 4. Eine verschobene Normalparabel geht durch den Punkt (4 | 9). Ihr Scheitelpunkt liegt auf der *y*-Achse. Wie lautet die allgemeine Form der Funktionsgleichung?
- 5. Gib eine Gleichung einer verschobenen Normalparabel an, deren Nullstellen  $x_1 = -5$  und  $x_2 = 1$  sind.
- 6. Eine Parabel und eine Gerade schneiden sich in den Punkten  $P(-1 \mid 6)$  und  $Q(2 \mid 3)$ . Gib beschreibende Funktionsgleichungen an.

ml 173, S. 57–60



Map zu quadratischen Parabeln:

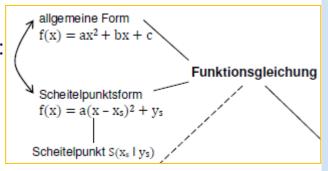




<u>z. B. Aufgabe 1</u>: Eine Parabel hat den Scheitelpunkt  $S(1 \mid 8)$  und schneidet bei 3 die *x*-Achse. Wie lautet ihre Funktionsgleichung in der allgemeinen Form?

#### Weg 1:

Begriff "Scheitelpunkt" wird auf Map gesucht:



 Scheitelpunktsform der Funktionsgleichung wird aufgestellt (Map zeigt den zu nutzenden Zusammenhang auf)

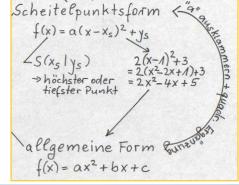
Pfeil von "Scheitelpunktsform" zu "allgemeine Form" zeigt: die eine Form

kann in die andere transformiert werden.

Aber: S muss wissen, wie die

Transformation funktioniert.

Hilfe: Map enthält z. B.:

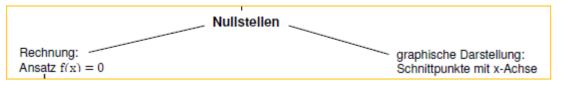




<u>z. B. Aufgabe 1</u>: Eine Parabel hat den Scheitelpunkt  $S(1 \mid 8)$  und schneidet bei 3 die *x*-Achse. Wie lautet ihre Funktionsgleichung in der allgemeinen Form?

#### Weg 1 – Fortsetzung:

- Jetzt fehlt noch der Wert für a.
- Angabe im Text: "Parabel ... schneidet bei 3 die x-Achse".



Ansatz: f(3)=0 hilft weiter.



<u>z. B. Aufgabe 1</u>: Eine Parabel hat den Scheitelpunkt  $S(1 \mid 8)$  und schneidet bei 3 die *x*-Achse. Wie lautet ihre Funktionsgleichung in der allgemeinen Form?

#### Weg 2:

Map-Ausschnitt zu "Schnittpunkte mit x-Achse":

- Lt. Aufgabentext:  $x_S \neq 3$ .
  - → Parabel mit 2 Nullstellen
- Nullstellen gleich weit entfernt von x<sub>S</sub> (Entfernung d)

$$\rightarrow x_S = 1, x_2 = 3, x_1 = -1$$

> Anderer Mapteil mit 2 Nullstellen:

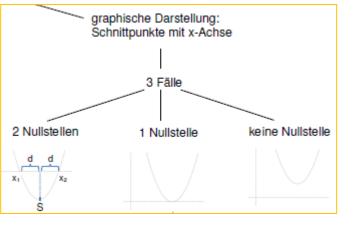
Satz von Viëta  

$$x_1 + x_2 = -p$$
  
 $x_1 * x_2 = q$ 

 $\rightarrow p$  und q bestimmen,

- für die Funktionsgleichung in allgemeiner Form benötigt man aber  $a, b, c \rightarrow Z$ usammenhang:  $q = \frac{\varepsilon}{a}$
- Bestimmen von a: Koordinaten von S in Funktionsgleichung einsetzen:

$$f(x) = a(x - x_s)^2 + y_s$$





<u>z. B. Aufgabe 1</u>: Eine Parabel hat den Scheitelpunkt  $S(1 \mid 8)$  und schneidet bei 3 die *x*-Achse. Wie lautet ihre Funktionsgleichung in der allgemeinen Form?

#### Weg 3:

> Wie im Weg 2 beginnen

 $\rightarrow$  Parabel mit 2 Nullstellen:  $x_1 = -1$ ,  $x_2 = 3$ 

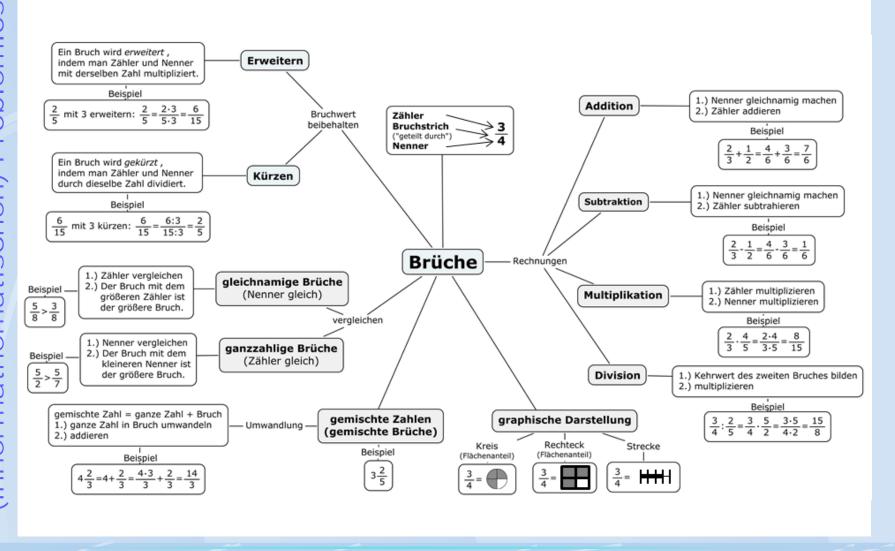
Map zeigt für 2 Nullstellen: faktorisierte Form  $f(x) = a(x - x_1)(x - x_2)$ 

- → Ausmultiplizieren führt auf allgemeine Form (diese Information ist in der Map nicht explizit angegeben)
- Bestimmen von a:  $x_{1}$ ,  $x_{2}$  und Koordinaten von S in faktorisierte Form einsetzen.

Hierbei genutztes Wissen:  $P(x_P \mid y_P)$  auf Graph bedeutet  $f(x_P) = y_P$ Hilfreich Ausschnitt einer S-Map:

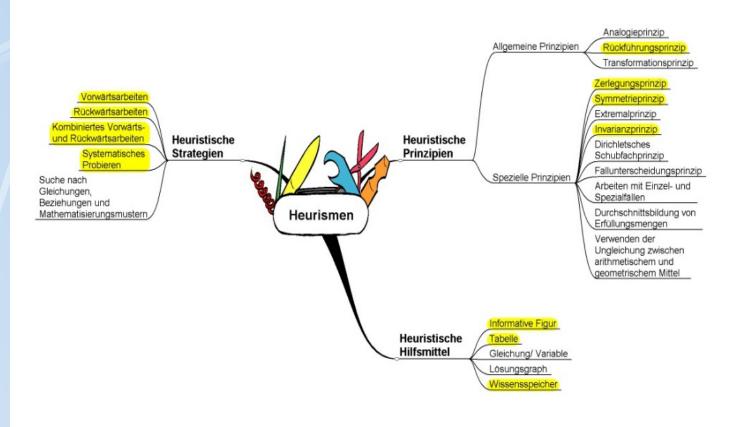


# 2.2 Maps mit Werkzeugen als Hilfe zum Problemlösen





# 2.3 Maps als Übersicht über Heurismen zum Problemlösen







## 3 Maps als Hilfe beim Modellieren

3.1 Modellierungsprozess



# 3.1 Modellierungsprozess

Modellierungskreislauf, z. B. nach Maaß 2005:

Bild aus:

Maaß, Katja (2005). Modellieren im Mathematikunterricht der Sekundarstufe I. In: *Journal für Mathematikdidaktik* 26, Heft 2, S. 114–142.

Im Folgenden: Maps als Hilfe beim Mathematisieren (mathematisch Modellieren)



Sachsituation mathematisieren (mathematisch modellieren):

- Arithmetische/algebraische Modellierung: passende Rechenaufgabe/Gleichung finden
- Funktionale Modellierung: passenden Funktionstyp finden, eine/mehrere Repräsentationsform(en) (Darstellungsform(en)) der beschreibenden Funktion nutzen
- Geometrische Modellierung: geometrische Figur in Sachsituation erkennen, Eigenschaften/Formeln/Sätze zu dieser geometrischen Figur formulieren und nutzen
- **>** ...



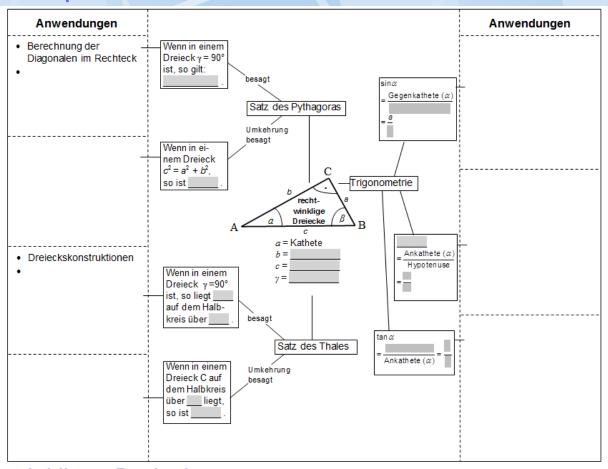
Wie findet man ein passendes mathematisches Modell zur gegebenen Sachsituation?

#### Beispiel:

Maps als Hilfe bei geometrischen Modellierungen

- Z. B.: In Sachsituation: ein <u>rechter Winkel</u>
- → Teil der Mathematisierung kann z. B. eine geometrische Figur mit einem rechten Winkel sein (rechtwinkliges Dreieck, Rechteck, ...);
- Eigenschaften, Formeln, Sätze, die für diese geometrische Figur gelten, können passende mathematische Modelle sein.





Fall: rechtwinkliges Dreieck

Map zeigt, dass z. B. der Satz des Pythagoras, der Satz des Thales oder trigonometrische Modelle in Frage kommen.



Wie findet man ein passendes mathematisches Modell zur gegebenen Sachsituation?

### Beispiel: Funktionale Modellierung

➤ In der Sachsituation werden 2 Größen betrachtet; verändert man die eine, so verändert sich auch die andere → Funktionale Modellierung



- Passenden Funktionstyp finden
  - Spezielle Sachsituation als typische Sachsituationsart zu einem bestimmten Funktionstyp erkennen (z. B. (Strom-)Kosten zusammengesetzt aus Fixkosten und Verbrauchskosten → lineare Funktion)
  - Im Text zur Sachsituation: typische sprachliche Formulierung
    (z. B. "verdoppelt (verdreifacht, vervierfacht usw.) man die eine
    Größe, so wird die andere auch verdoppelt (verdreifacht,
    vervierfacht usw.) → proportionale Funktion)
  - In den gegebenen Daten (nummerische Darstellung, z. B. Messreihe) Beziehungen zwischen den Zahlenwerten erkennen, die typisch für eine bestimmte Funktionsart sind (z. B. Produktgleichheit einander zugeordneter Werte → umgekehrt proportionale Funktion)
  - Vorgegebene graphische Darstellung als typisch für eine bestimmte Funktionsart erkennen (z. B. Gerade in einem Koordinatensystem → lineare Funktion)
- Für eine weitere mathematische Bearbeitung ist oft ein Darstellungswechsel der Funktion (nummerisch ↔ graphisch ↔ algebraisch) nötig/sinnvoll.



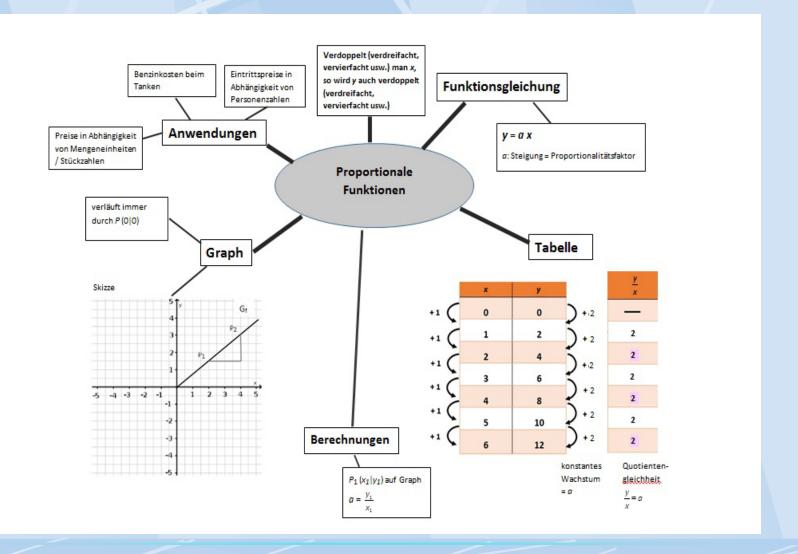
#### Maps als Hilfe für Funktionale Modellierung:

- > sollten typische Erkennungsmerkmale einzelner Funktionenklassen aufzeigen,
- insbesondere zu einer Funktionenklasse verschiedene Darstellungsformen (situativ, sprachlich, nummerisch, graphisch, algebraisch) mit ihren charakteristischen Merkmalen aufzeigen,
- > und Darstellungswechsel erleichtern, indem Zusammenhänge zwischen einzelnen Darstellungsformen aufgezeigt werden.

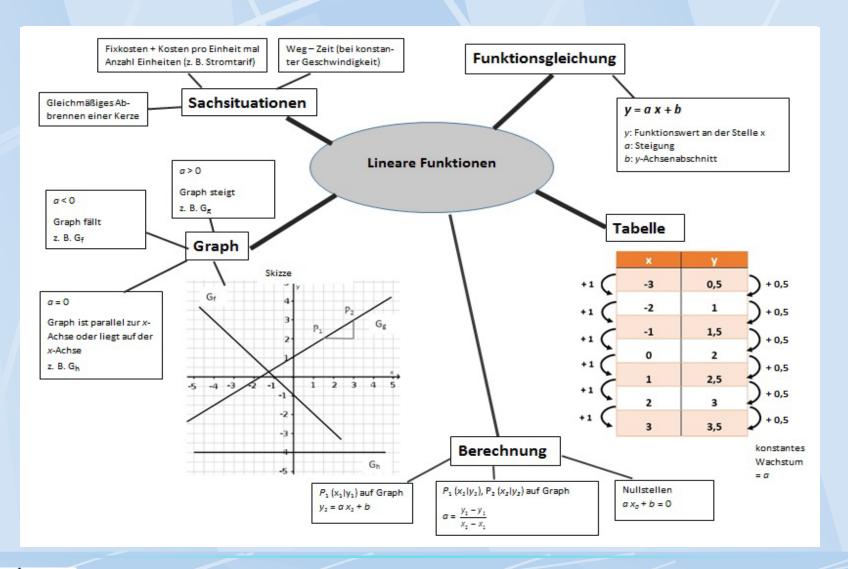
Folgerung (aufgrund der vielen zu zeigenden Informationen): Zu jeder (schulrelevanten) Funktionsklasse eine eigene Map.

Für eine bessere Orientierung der SuS: Die einzelnen Maps sollten die gleiche Grundstruktur aufweisen.

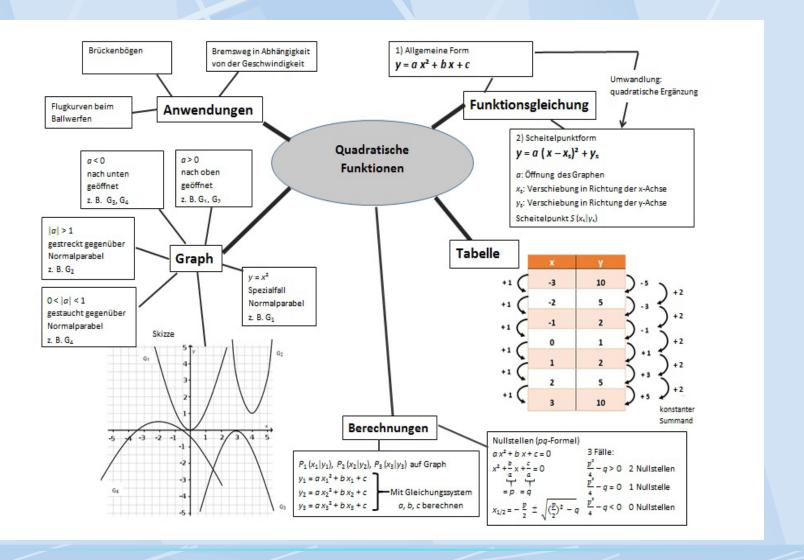




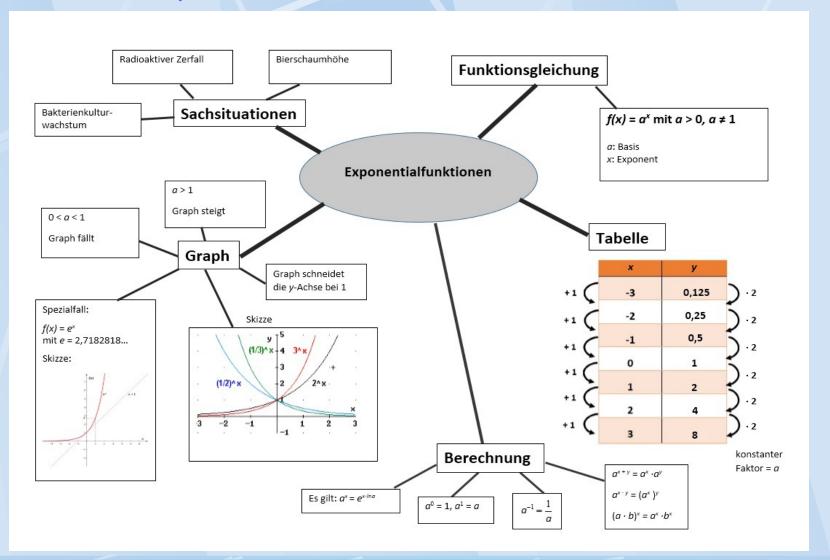














#### Aufgaben zu Wachstumsprozessen

passendes Modell finden, z. B.:

#### Aufgabe 1

Kauft man Himbeeren beim Obsthändler in Deutschland, so kostet 1 kg Himbeeren 6 € Familie Schneider fährt in die Niederlande und zahlt dort 4 € pro Kilogramm. Die Fahrtkosten für die Hin- und Rückfahrt betragen 8 €

- a) Wie viel kosten 3 kg Himbeeren in Deutschland?
- b) Wie viel kostet die gleiche Menge Himbeeren in den Niederlanden? Lohnt sich die Fahrt?

[Lösung: a) proportionale Funktion, b) lineare Funktion]



#### Aufgabe 2

Lisa bekommt monatlich 20,- € Taschengeld. Zu ihrem 14. Geburtstag erhält sie von ihren Eltern zwei Angebote, aus denen sie sich eines aussuchen soll:

Jeden Monat wird ihr Taschengeld um 0,50 € erhöht (Angebot 1) oder jeden Monat wird ihr Taschengeld um 2 % erhöht (Angebot 2).

- a) Berechne für beide Angebote, wie hoch Lisas Taschengeld zu ihrem 15. Geburtstag bzw. zu ihrem 18. Geburtstag wäre. Stelle die Entwicklung der Höhe des Taschengeldes gemäß der beiden Angebote graphisch dar.
- b) Lisa möchte in den ersten 12 Monaten ihr Taschengeld ansparen. Erstelle zu jedem der beiden Angebote eine Wertetabelle. Wie viel Geld würde Lisa beim Angebot 1 und wie viel Geld beim Angebot 2 in 12 Monaten ansparen?

Was für eine Zuordnung liegt den beiden Sparmodellen jeweils zugrunde? Gib passende Funktionsterme an, wenn es sich um eine lineare, eine quadratische oder eine exponentielle Zuordnung handelt.

Wie viel Geld könnte Lisa mit ihrem Taschengeld beim Angebot 1 und wie viel Geld beim Angebot 2 bis zu ihrem 18. Geburtstag ansparen?

[Lösung: a) *Angebot 1*: lineare Funktion, *Angebot 2*: exponentielle Funktion; b) *Angebot 1*: quadratische Funktion (Differenzenfolge 2. Ordnung konstant), *Angebot 2*: weder lineares, noch quadratisches, noch exponentielles Wachstumsmodell]



#### Maps, die Basiswissen für Problemlöseprozesse abbilden

Map, die als Hilfe beim Problemlösen eingesetzt werden kann:

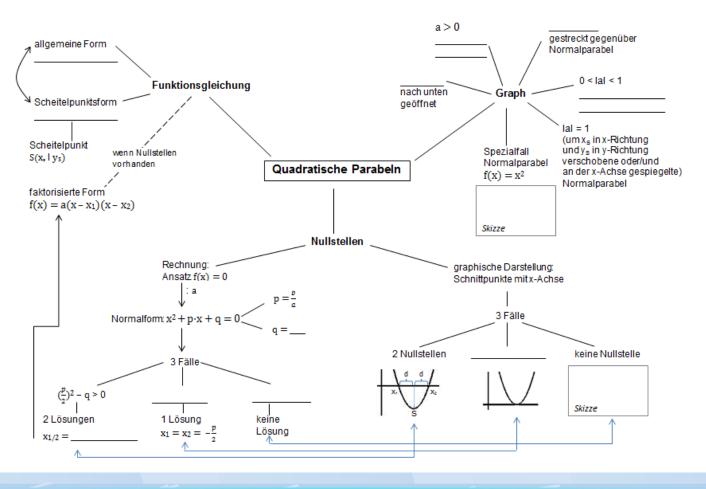
- > Von SuS selbst erstellte Map, ggf. mit L-Hilfe ergänzt
- Von SuS erstellte Map mit vorgegebener inhaltlicher Eingrenzung (z. B. Map als Antwort zu vorgegebenen Fragen, Map zu vorgegebenen Begriffen)
- Vorstrukturierte Map, von SuS ergänzt (z. B. Lückenmap, Map mit vorgegebenem Grundgerüst)
- Vorgegebene "Master-"Map

#### Maps als Hilfe beim mathematischen Modellieren

Lückenmap vorgeben und ergänzen lassen, ergänzte Map zum Lösen von Modellierungsaufgaben nutzen

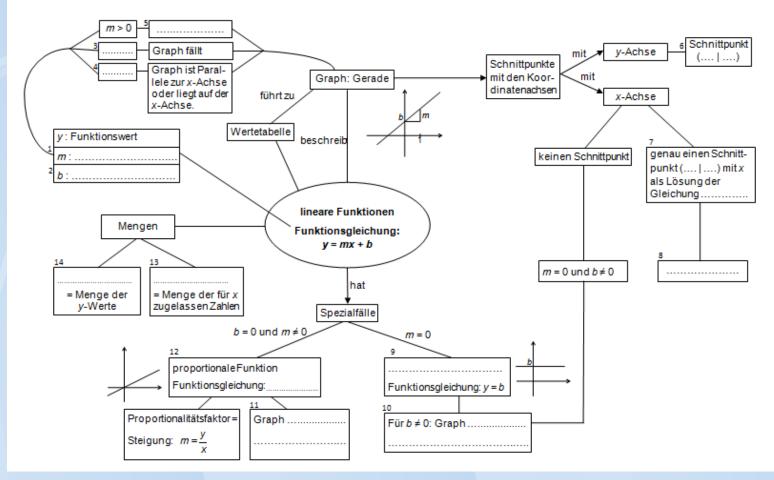


> Z. B.: Map als "Lückentext", ergänzte Map als Hilfe beim Problemlösen nutzen



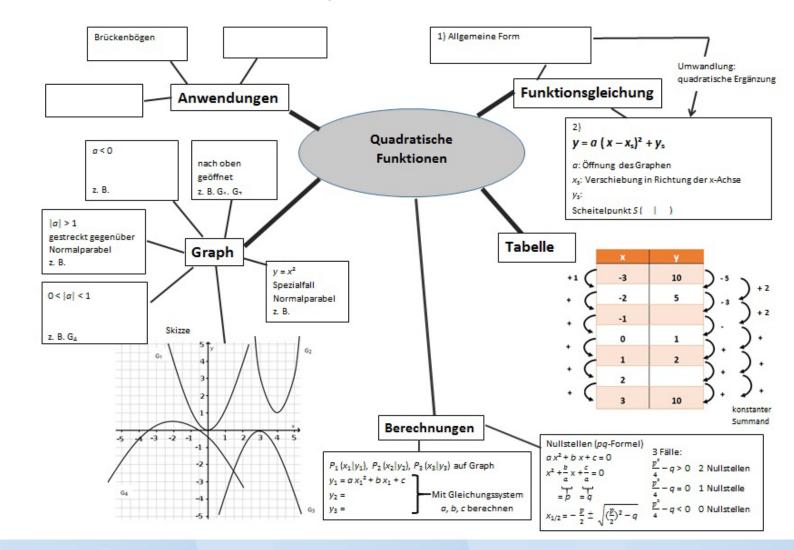


Map als "Lückentext": als Hilfe Liste mit passenden Eintragungen



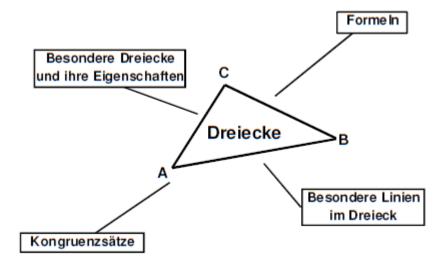


Z. B.: Map als "Lückentext", ergänzte Map als Hilfe beim Modellieren nutzen





Maps mit vorgegebener Strukturierung erstellen, z. B. Thema Dreiecke in Klasse 7, Map vervollständigen:





Maps zu vorgegebenen "Begriffen" erstellen, z. B. Potenzen in Klasse 9:

Vorgegebene "Begriffe":

- Multiplizieren von Potenzen
- Potenzieren von Potenzen
- Dividieren von Potenzen
- Gleiche Basis
- Gleicher Exponent
- Exponenten addieren, Basis erhalten
- Basen multiplizieren, Exponent erhalten
- $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$
- $\bullet \quad a^n \cdot b^n = (a \cdot b)^n$
- ...







- Maps erstellen, die vorgegebene Fragen beantworten
   z. B. Thema "Dreiecke":
  - Was für besondere Dreiecke gibt es?
  - Was weiß man über die Winkel in einem Dreieck?
  - Welche besonderen Linien im Dreieck gibt es?
  - Welche Sätze gelten für Dreiecke?
  - Was für besondere Kreise kann man zu einem Dreieck konstruieren? Wo liegt für diese Kreise jeweils der Mittelpunkt? ...
- Erst Map frei erstellen und dann mit Hilfe vorgegebener Fragen ergänzen
- Master-Maps "lesen", evtl. Fragen als Hilfe



### 5 Ausgearbeitete Unterrichtsmaterialien

#### Schriftenreihe: *Mathe vernetzt*

Anregungen und Materialien für einen vernetzenden Mathematikunterricht.
 Herausgegeben von Astrid Brinkmann
 Aulis Verlag.

**Band 1,** S. 22–35, Astrid Brinkmann: *Visualisieren und Lernen von vernetztem mathematischen Wissen mittels Mind Maps und Concept Maps* 



Band 3, S. 23–32
Thomas Borys & Astrid Brinkmann
Strukturiertes Lehren und Lernen mit Maps –
Methodische Vorgehensweisen
zur inhaltlichen Eingrenzung

**Band 4**, S. 23–35, Astrid Brinkmann: *Maps als Hilfe beim Problemlösen und beim Modellieren* 



### 5 Ausgearbeitete Unterrichtsmaterialien

#### Band: Kopiervorlagen und Materialien

zu Band 1–3 der Schriftenreihe: *Mathe vernetzt* 

- Mind Maps zu Fragen und/oder mit vorgegebener Struktur Thema Dreiecke
- Lückenmap Lineares Gleichungssystem
- Lückenmap Lineare Funktionen
- Lückenmap Quadratische Parabeln
- Lückenmap: Rechtwinklige Dreiecke Sätze, Trigonometrie, Anwendungen
- Lückenmap Schriftliche Rechenverfahren
- Lückenmap Dreieckskonstruktionen
- Lückenmap Dreiecke
- Lückenmap Ähnliche Vielecke
- Mind Mapping Wurzel- und Potenzrechnung



### 5 Ausgearbeitete Unterrichtsmaterialien

#### Band 4: Buchteil: Materialien und Kopiervorlagen

- Lückenmap Bruchrechnung
- Lückenmap Dreisatz
- ➤ Lückenmaps und Aufgaben Wachstumsfunktionen





Astrid Brinkmann

astrid.brinkmann@math-edu.de