

UNTERSUCHUNG ZU BEZIEHUNGEN ZWISCHEN DEN FIBONACCI-ZAHLEN UND DER MUSIK

Corinna Brinkmann

4 KLASSTIFIZIERUNG VON KONSONANZGRADEN MIT HILFE VON FIBONACCI-ZAHLEN

Im 18. Jahrhundert versuchte EULER die **Konsonanz**, den zentralen Begriff der Harmonielehre mathematisch auszudrücken.

Als konsonant werden Intervalle bezeichnet, die als wohlklingend empfunden werden und nicht nach Auflösung in einen anderen Klang drängen; im Gegensatz hierzu werden Intervalle, die spannungsvoll empfunden werden, als dissonant bezeichnet [4].

Als ein Kriterium für den **Konsonanzgrad** gilt die Einfachheit der Proportionen. Dafür führte EULER seine „gradus-suavitatis-Funktion“ Γ ein, die jedem Zahlenverhältnis $\frac{x}{y}$ mit $x, y \in \mathbf{N}$

einen Wert $\Gamma\left(\frac{x}{y}\right)$ zuordnet, der den Konsonanzgrad des dem Zahlenverhältnis entsprechenden Intervalls angibt [1].

EULER benutzt zur Definition der Funktion Γ , dass sich jede positive ganze Zahl a in der Form

$$a = p_1^{e_1} \cdot p_2^{e_2} \cdots p_n^{e_n} \quad (2)$$

darstellen lässt, wobei $p_1 < p_2 < \dots < p_n$ eine wachsende Primzahlfolge ist und $e_1, e_2, \dots, e_n$ positive ganze Zahlen sind.

EULER setzt nun $\Gamma\left(\frac{x}{y}\right) = \Gamma(x \cdot y)$, wenn $\left(\frac{x}{y}\right)$ ein positiver gekürzter Bruch ist.

Mit $x \cdot y = a$ und a in o.a. Darstellungsweise lautet dann seine „gradus-suavitatis-Funktion“:

$$\Gamma(a) = 1 + \sum_{k=1}^n e_k (p_k - 1) \quad (3)$$

In diese Funktion setzte EULER die Frequenzverhältnisse der reinen Stimmung ein und konnte somit den Konsonanzgrad von Frequenzproportionen mit ganzen, natürlichen Zahlen beschreiben; je kleiner der Konsonanzgrad, desto wohlklingender ist das zugehörige Intervall. Es ergibt sich folgende Zuordnung von Frequenzproportionen zu Konsonanzgraden [1]:

Konsonanzgrad	Proportionen	Intervall
1	1:1	Prime
2	1:2	Oktave
3	1:3 1:4	Oktave + Quinte 2 Oktaven
4	2:3 1:6 1:8	Quinte 2 Oktaven + Quinte 3 Oktaven
5	3:4	Quarte
6	2:5 2:9	2 Oktaven + Terz 2 Oktaven + gr. Sekunde
7	3:5 4:5 4:9	gr. Sexte gr. Terz Oktave + gr. Sekunde
8	5:6 5:8 8:9	kl. Terz kl. Sexte gr. Sekunde
9	5:9	kl. Septime
10	8:15	gr. Septime
13	15:16	kl. Sekunde
14	32:45	Tritonus

Tabelle 13: Zuordnung von Frequenzproportionen zu Konsonanzgraden nach EULER

Da sich Intervalle, wie oben aufgezeigt, durch Fibonacci-Zahlen umschreiben lassen, ist es naheliegend zu versuchen, eine **Klassifizierung von Intervallen entsprechend ihrem Wohlklang mittels der Fibonacci-Zahlen** vorzunehmen.

Ausgegangen bin ich von der Tatsache, dass sich sämtliche **Frequenzverhältnisse der chromatischen Tonleiter** (reine Stimmung), wie oben gezeigt (siehe 3.7), als **Verhältnisse von Produkten aus Fibonacci-Zahlen** darstellen lassen.

Zwecks Zuordnung der verschiedenen Intervalle, gegeben in ihrer Darstellung durch Verhältnisse aus Produkten aus Fibonacci-Zahlen, zu verschiedenen Konsonanz-Klassen, habe ich nach einer geeigneten Funktionsvorschrift gesucht.

Ich habe festgestellt, dass dies gut möglich ist, wenn man alle vorkommenden Fibonacci-Zahlen in ihre Primfaktoren zerlegt, die wiederum Fibonacci-Zahlen sind. Je größer die Summe der Anzahlen der im Zähler und im Nenner vorkommenden Faktoren ist, desto dissonanter klingt ein Intervall.

F sei also eine Funktion, die die Menge P („Menge der Frequenzverhältnisse“) in die Menge N der natürlichen Zahlen abbildet. Jedes Element von P sei dabei als ein nicht weiter kürzbarer Bruch dargestellt. $F\left(\frac{j}{k}\right)$ bezeichne die Konsonanzklasse, zu der das

Frequenzverhältnis $\frac{j}{k}$ gehört.

Für ein Frequenzverhältnis $\frac{j}{k}$ ($j, k \in \mathbb{N}$; $\frac{j}{k}$ ist positiver nicht weiter kürzbarer Bruch) setze ich nun in Anlehnung an EULERS Darstellung:

$$F\left(\frac{j}{k}\right) = F(jk), \quad (4)$$

$j \cdot k =: a$ ist dabei eine natürliche Zahl, die sich somit (für $a \neq 1$) in der Form

$$a = p_1^{e_1} p_2^{e_2} \dots p_n^{e_n}, \quad (5)$$

darstellen lässt, wobei $p_1 < p_2 < \dots < p_n$ eine wachsende Primzahlfolge und $e_1, e_2, \dots, e_n$ positive ganze Zahlen sind.

Die Funktionsvorschrift für F lautet dann: $F(a) = e_1 + e_2 + \dots + e_n$, für $a \neq 1$ (6)

$$\text{und} \quad F(1) = 1 \quad (7)$$

Funktionswerte von F erhält man somit, indem man zunächst den Bruch, für den man den zugehörigen Funktionswert berechnen will, so weit wie möglich kürzt, dann das Produkt aus dem Zähler und dem Nenner bildet; dieses in Primfaktoren zerlegt und die Vielfachheiten der jeweiligen Primfaktoren addiert.

Beispiel: Gesucht wird der Konsonanzgrad der Quarte, die durch das Frequenzverhältnis von $\frac{3}{4}$ beschrieben wird.

Nach Gleichung (4) gilt: $F\left(\frac{3}{4}\right) = F(3 \cdot 4) = F(12)$

Die Primfaktorzerlegung von 12 ist: $12 = 2^2 \cdot 3^1$

Mit Gleichung (6) erhält man dann für $F(12)$: $F(12) = 2 + 1 = 3$

Somit lässt sich der Quarte die Konsonanzklasse **3** zuordnen.

Mit dieser Funktionsvorschrift ordne ich somit den verschiedenen Intervallen auf der Basis von Fibonacci-Zahlen jeweils eine Konsonanzklasse zu. Dabei kann mehreren Intervallen dieselbe Konsonanzklasse zugeordnet sein; sie gehören dann einer **Konsonanzklasse** an.

Innerhalb jeder dieser „**Fibonacci-Konsonanzklassen**“ ordne ich nun die zugehörigen Intervalle nach folgender Regel:

Je kleiner der Zahlenwert für i mit $i = jk$ ist, desto höher ist die Konsonanz des Intervalls mit dem Frequenzverhältnis $\frac{j}{k}$.

Mit dieser Regel ist es nun möglich, jedem Intervall eine „**Fibonacci-Ordnungszahl**“ zuzuordnen, wobei die Konsonanz der Intervalle mit steigender Ordnungszahl abnimmt.

Im Folgenden werde ich mich auf den Umfang von **zwei Oktaven** beschränken.

Die verschiedenen Intervalle, die innerhalb von zwei Oktaven vorkommen, mit ihren Frequenzverhältnissen und den zugehörigen Fibonacci-Konsonanz-Klassen und Fibonacci-Ordnungszahlen, so wie sie sich nach obigen Vorschriften ergeben, sind in der folgenden Tabelle 14 dargestellt.

Proportionen	Intervall	Fibonacci-Konsonanzklasse	Fibonacci-Ordnungszahl
$\frac{1}{1}$	Prime	1	1
$\frac{1}{2}$	Oktave	1	2
$\frac{1}{3}$	Oktave + Quinte	1	3
$\frac{1}{4}$	2 Oktaven	2	4
$\frac{2}{3}$	Quinte	2	5
$\frac{2}{5}$	Oktave + gr. Terz	2	6
$\frac{3}{5}$	gr. Sexte	2	7
$\frac{3}{4}$	Quarte	3	8
$\frac{4}{5}$	gr. Terz	3	9
$\frac{5}{6}$	kl. Terz	3	10
$\frac{3}{10}$	Oktave + gr. Sexte	3	11
$\frac{5}{9}$	kl. Septime	3	12
$\frac{3}{8}$	Oktave + Quarte	4	13
$\frac{4}{9}$	Oktave + gr. Sekunde	4	14
$\frac{5}{8}$	kl. Sexte	4	15
$\frac{5}{12}$	Oktave + kl. Terz	4	16
$\frac{4}{15}$	Oktave + gr. Septime	4	17
$\frac{5}{18}$	Oktave + kl. Septime	4	18
$\frac{8}{9}$	gr. Sekunde	5	19
$\frac{5}{16}$	Oktave + kl. Sexte	5	20
$\frac{8}{15}$	gr. Septime	5	21
$\frac{15}{16}$	kl. Sekunde	6	22
$\frac{15}{32}$	Oktave + kl. Sekunde	7	23
$\frac{16}{45}$	Oktave + Tritonus	7	24
$\frac{32}{45}$	Tritonus	8	25

Tabelle 14: Konsonanzklassen nach einer Zuordnung mit Hilfe von Fibonacci-Zahlen

Um einen Vergleich zwischen meiner Einteilung und der bisher gebräuchlichen nach EULER [1] übersichtlicher gestalten zu können, ordne ich auch den Intervallen mit ihren Konsonanzgraden nach EULER **Ordnungszahlen** zu.

Da bei EULER innerhalb einer Konsonanzklasse alle Intervalle gleichberechtigt sind, kann man hier die Intervalle nicht einfach durchnummerieren. Daher ordne ich Intervallen, bei denen keine eindeutige Zuordnung möglich ist, so viele Ordnungszahlen zu, wie Intervalle zu der entsprechenden Konsonanzklasse gehören; d.h. gehören einer Konsonanzklasse z.B. 3 Intervalle an, so erhält jedes dieser drei Intervalle drei aufeinanderfolgende Ordnungszahlen. Diese Ordnungszahlen nenne ich „**Euler-Ordnungszahlen**“.

Proportionen	Intervall	Konsonanzgrad nach EULER	Euler-Ordnungszahl
$\frac{1}{1}$	Prime	1	1
$\frac{1}{2}$	Oktave	2	2
$\frac{1}{3}$	Oktave + Quinte	3	3,4
$\frac{1}{4}$	2 Oktaven		3,4
$\frac{2}{3}$	Quinte	4	5
$\frac{3}{4}$	Quarte	5	6
$\frac{2}{5}$	Oktave + gr. Terz	6	7,8
$\frac{3}{8}$	Oktave + Quarte		7,8
$\frac{3}{5}$	gr. Sexte	7	9,10,11
$\frac{4}{5}$	gr. Terz		9,10,11
$\frac{4}{9}$	Oktave + gr. Sekunde		9,10,11
$\frac{5}{6}$	kl. Terz	8	12,13,14,15
$\frac{3}{10}$	Oktave + gr. Sexte		12,13,14,15
$\frac{5}{8}$	kl. Sexte		12,13,14,15
$\frac{8}{9}$	gr. Sekunde		12,13,14,15
$\frac{5}{9}$	kl. Septime	9	16,17,18,19
$\frac{5}{12}$	Oktave + kl. Terz		16,17,18,19
$\frac{4}{15}$	Oktave + gr. Septime		16,17,18,19
$\frac{5}{16}$	Oktave + kl. Sexte		16,17,18,19
$\frac{5}{18}$	Oktave + kl. Septime	10	20
$\frac{8}{15}$	gr. Septime	11	21
$\frac{15}{16}$	kl. Sekunde	11	22
$\frac{15}{32}$	Oktave + kl. Sekunde	12	23
$\frac{16}{45}$	Oktave + Tritonus	13	24
$\frac{32}{45}$	Tritonus	14	25

Tabelle 15: Zuteilung von Ordnungszahlen für EULERS Darstellung der Konsonanzgrade

In der folgenden Tabelle 16 werden die verschiedenen Intervalle mit ihren Frequenzverhältnissen und den zugehörigen Fibonacci-Ordnungszahlen sowie Euler-Ordnungszahlen dargestellt.

In dieser Tabelle habe ich für die einzelnen Intervalle die Ordnungszahlen, bei denen die Fibonacci-Ordnungszahl mit einer der zugehörigen Euler-Ordnungszahlen übereinstimmt, **fett** geschrieben, diejenigen, die nur um den Wert 1 voneinander abweichen, **fett und kursiv** und diejenigen, die um den Wert 2 voneinander abweichen *kursiv*.

Proportionen	Intervall	Fibonacci-Ordnungszahl	Euler-Ordnungszahl
$\frac{1}{1}$	Prime	1	1
$\frac{1}{2}$	Oktave	2	2
$\frac{1}{3}$	Oktave + Quinte	3	3,4
$\frac{1}{4}$	2 Oktaven	4	3,4
$\frac{2}{3}$	Quinte	5	5
$\frac{2}{5}$	Oktave + gr. Terz	6	7,8
$\frac{3}{5}$	gr. Sexte	7	9,10,11
$\frac{3}{4}$	Quarte	8	6
$\frac{4}{5}$	gr. Terz	9	9,10,11
$\frac{5}{6}$	kl. Terz	10	12,13,14,15
$\frac{3}{10}$	Oktave + gr. Sexte	11	12,13,14,15
$\frac{5}{9}$	kl. Septime	12	16,17,18,19
$\frac{3}{8}$	Oktave + Quarte	13	7,8
$\frac{4}{9}$	Oktave + gr. Sekunde	14	9,10,11
$\frac{5}{8}$	kl. Sexte	15	12,13,14,15
$\frac{5}{12}$	Oktave + kl. Terz	16	16,17,18,19
$\frac{4}{15}$	Oktave + gr. Septime	17	16,17,18,19
$\frac{5}{18}$	Oktave + kl. Septime	18	20
$\frac{8}{9}$	gr. Sekunde	19	12,13,14,15
$\frac{5}{16}$	Oktave + kl. Sexte	20	16,17,18,19
$\frac{8}{15}$	gr. Septime	21	21
$\frac{15}{16}$	kl. Sekunde	22	22
$\frac{15}{32}$	Oktave + kl. Sekunde	23	23
$\frac{16}{45}$	Oktave + Tritonus	24	24
$\frac{32}{45}$	Tritonus	25	25

Tabelle 16: Vergleich zwischen den Fibonacci-Ordnungszahlen und den Euler-Ordnungszahlen

Es ist zu erkennen, dass meine Einteilung auf der Grundlage von Fibonacci-Zahlen sich nicht wesentlich von der durch EULER vorgenommenen Einteilung unterscheidet.

14 der 25 Werte stimmen exakt überein, weitere 3 weisen nur eine Abweichung um den Wert 1 auf und weitere 4 weichen nur um den Wert 2 voneinander ab, so dass nur vier Werte eine größere Abweichung voneinander aufweisen, als um den Wert 2.

Welche der beiden Einteilungen nun das menschliche Harmonieempfinden eher trifft, hängt von jedem einzelnen Individuum ab, sowie von der Kultur aus der es stammt und von vielen anderen Faktoren.

In jedem Fall stellt meine Einteilung nach den Fibonacci-Zahlen eine Alternative zu EULERS Einteilung dar, vor allem da sie auf Zahlen beruht, die, wie gezeigt, ohnehin eine große Bedeutung in der Musik haben.

Ein wesentlicher Vorzug meiner Einteilung ist, dass hier die Intervalle nicht nur in Konsonanzklassen eingeteilt werden, sondern darüber hinaus auch in einer eindeutigen Reihenfolge nach Konsonanz streng geordnet werden, während bei EULERS System nur eine Klasseneinteilung vorgenommen wird.

6 QUELLEN

[1] Armbrust, Ansgar: *Vom Bambusrohr zur Orgelpfeife*, MNU Jahrgang 52, Heft 2 1999 (S. 76-81).

[2] Baptist, Peter: *Phythagoras und kein Ende?*, Leipzig 1997.

[3] Brockhaus Riemann: *Musik Lexikon*, Mainz 1990.

[4] *dtv-Atlas zur Musik*, München 1994.

[5] Kuchling, Horst: *Physik Formeln und Gesetze*, Leipzig 1976.

[6] *Microsoft QuickShelf* 1995, *Meyers Lexikon*.

[7] Sheldrake, Rupert: *Das Gedächtnis der Natur* (S. 40-43), München 1990.