Vernetzungen im Mathematikunterricht

Graphische Darstellungen mathematischen Wissens als Unterrichtsmittel

Astrid Brinkmann
Universität Münster, Deutschland

Vortrag in Linz, Österreich
30. April 2010

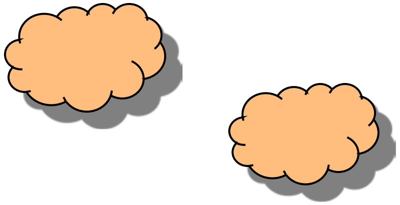
http://www.math-edu.de *astrid.brinkmann@math-edu.de*

Gliederung

1. Die Netzwerkstruktur mathematischen Wissens
2. Defizite in Lehr- und Lernprozessen
3. Graphische Darstellungen mathematischen Wissens
   - 3.1 Mind Maps
   - 3.2 Concept Maps
   - 3.3 Mind Maps und Concept Maps als Unterrichtsmittel
   - 3.4 Abgewandelte Map-Formen
   - 3.5 Diskussion, offene Fragen, Ausblick
4. GDM-AK Vernetzungen im MU

1. Die Netzwerkstruktur mathematischen Wissens

Es ist ... schlecht, wie wir zulassen, daß Lehrer die Mathematik unserer Kinder zu schmalen und fragilen Türmen und Ketten formen, statt zu widerstandsfähigen querverbundenen Netzen. Eine Kette kann an jedem Glied zerbrechen, ein Turm kann beim leichtesten Stoß umfallen. Und das ist es, was in einer Mathematikstunde mit dem Geist eines Kindes geschieht, dessen Aufmerksamkeit nur einen Augenblick lang von einer hübsch geformten Wolke am Himmel abgelenkt wird.



Marvin Minsky (1990). „Mentopolis“.

1. Die Netzwerkstruktur mathematischen Wissens

PISA -Studie:

... for OECD/PISA, interconnections and common ideas are central elements. .

OECD. 1999.

1. Die Netzwerkstruktur mathematischen Wissens

Bildungsstandards

zielen auf systematisches und **vernetztes Lernen** ...

(Aus dem Text zu Bildungsstandards FOR)

1. Die Netzwerkstruktur mathematischen Wissens

Vernetztes System		
Komponenten		
Verbindungen; Abhängigkeiten		

1. Die Netzwerkstruktur mathematischen Wissens

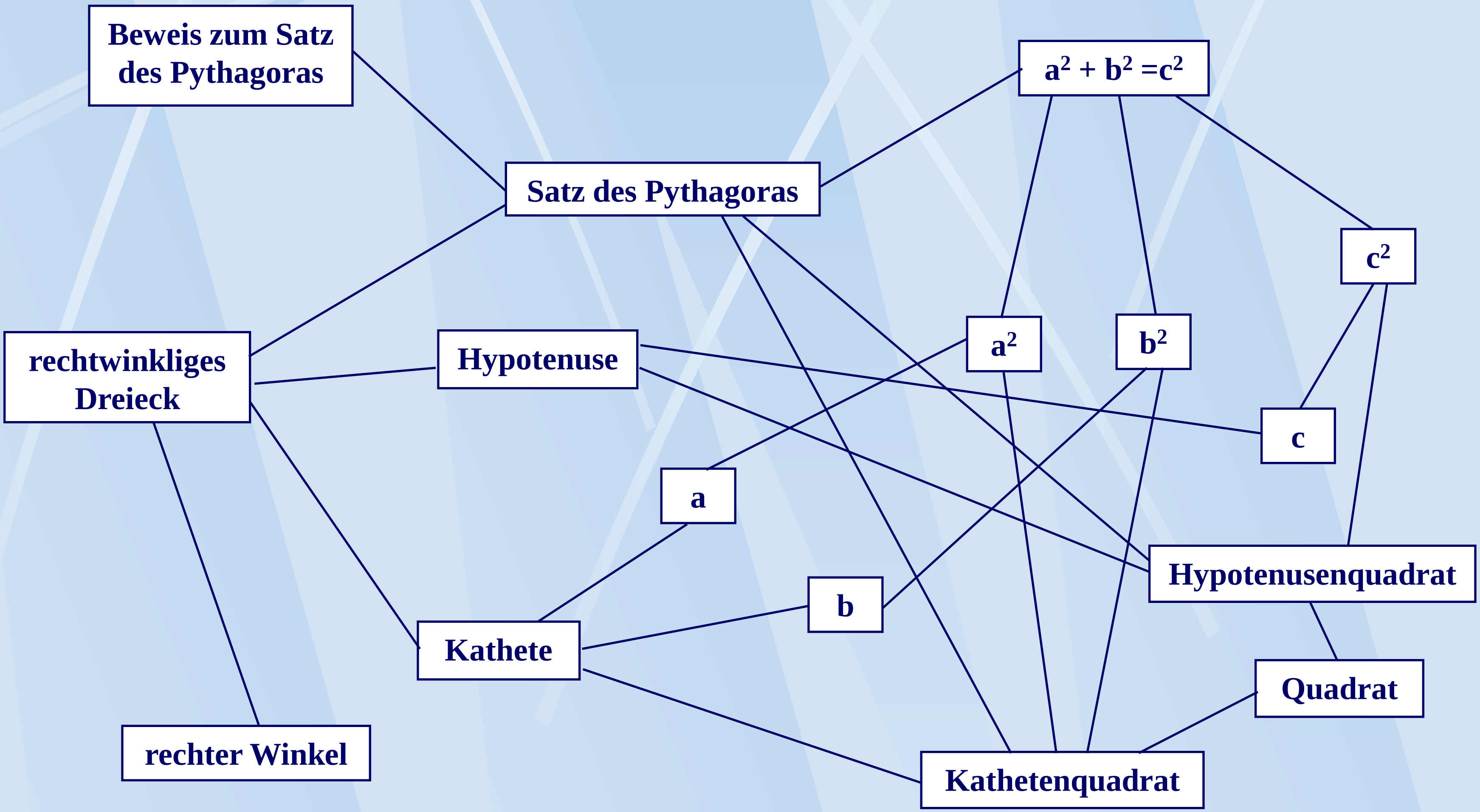
Vernetztes System	**Mathematische Modellierung:** **Graph**	
Komponenten	**Knoten**	
Verbindungen; **Abhängigkeiten**	**Kanten** **(gerichtet, ungerichtet)**	

1. Die Netzwerkstruktur mathematischen Wissens

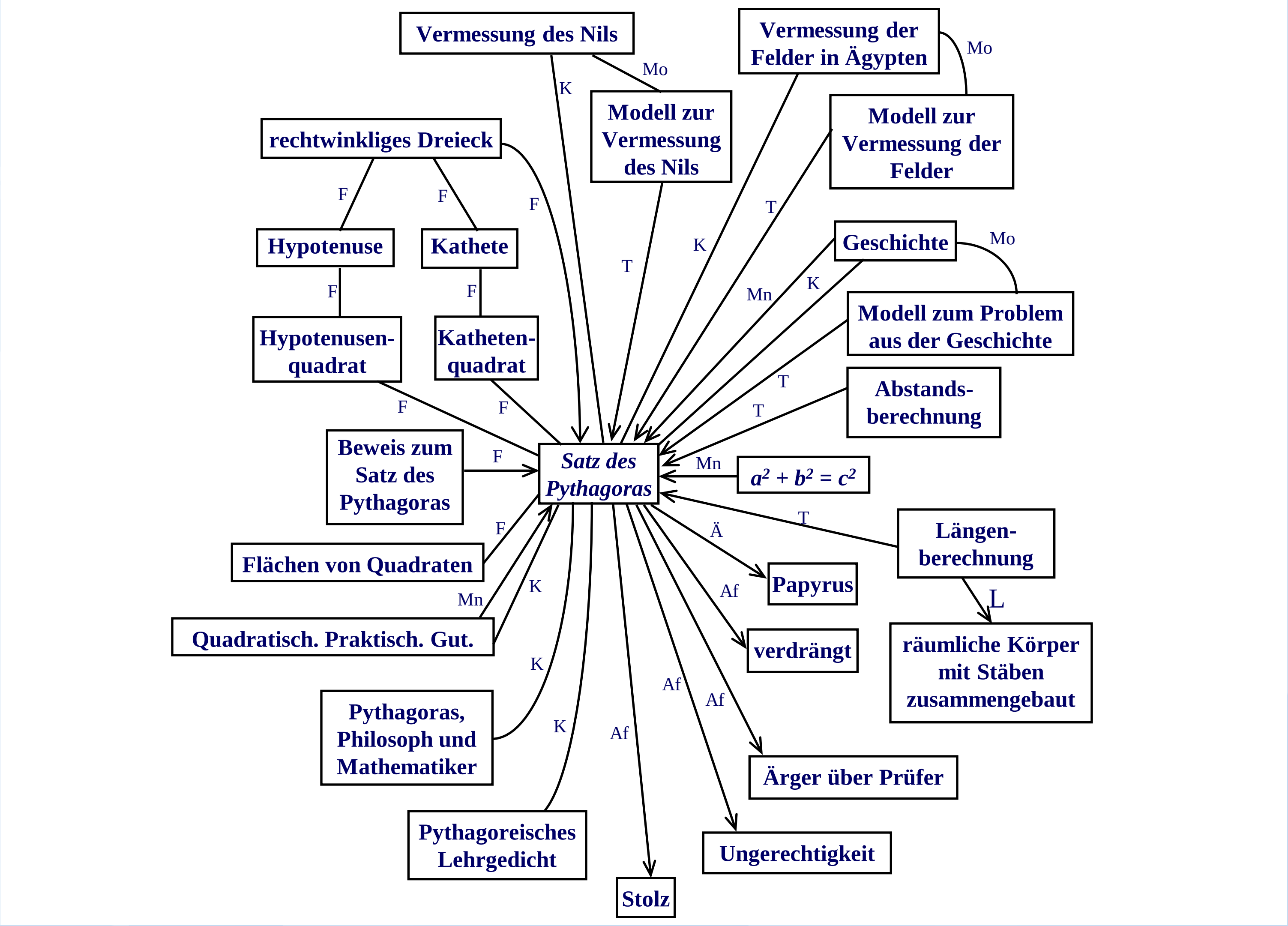
Vernetztes System	Mathematische Modellierung: Graph	Inhaltliche Interpretation
Komponenten	Knoten	Mathematische Objekte, nicht-mathematische Komponenten
Verbindungen; Abhängigkeiten	Kanten (gerichtet, ungerichtet)	Relation = Vernetzung (einseitig, wechselseitig)

1. Die Netzwerkstruktur mathematischen Wissens

Mathematisches Netzwerk



Netzwerk zum Satz des Pythagoras



Kategorien der Vernetzung

- **Innermathematische Vernetzungen**
  - Fachsystematische Vernetzung, z. B.
    - verschiedene Interpretationen von Teilmengen-beziehungen (Oberbegriff-/Unterbegriff-Relation, Obermengen-/Untermengen-Relation, Fallunterscheidungen, Kategorisierungen, Klasseneinteilungen, Merkmalsvernetzung, ...)
    - Relation „daraus folgt“
    - Relation „beweist“
    - Relation „ist eine Lösung von“
  - Anwendungsbezogene Vernetzung

    (Verbinden mit Sätzen, Algorithmen, Modellen, ... zur Lösung von Aufgaben)
- **Vernetzungen mathematischer Objekte mit nichtmathematischen Knoten**

  (z.B. bei Anwendungsaufgaben)

1. Die Netzwerkstruktur mathematischen Wissens

Beispielaufgabe (Bildungsstandards)

Gegeben:

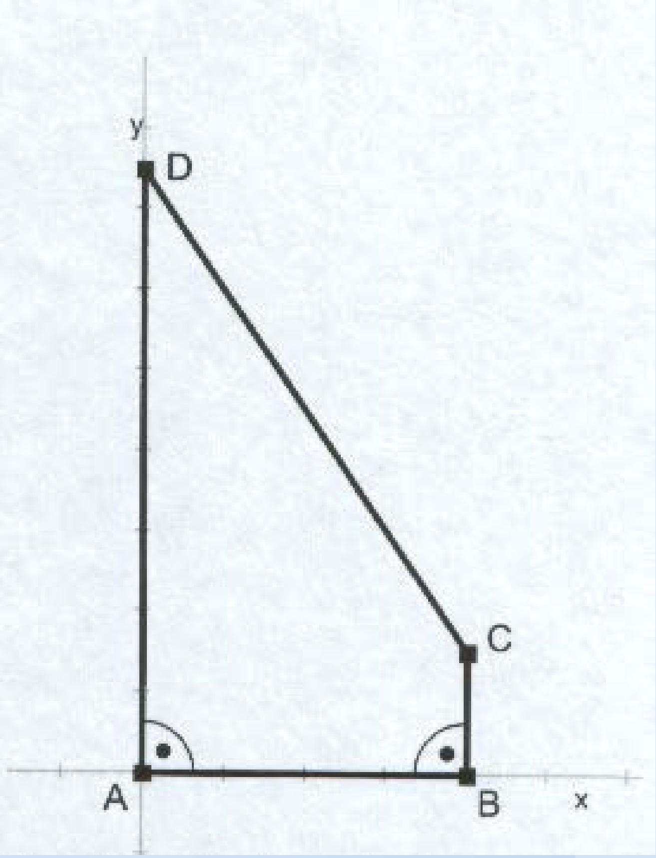
Trapez mit A(0 ; 0), B(8 ; 0), C(8 ; 3), D(0 ; 15), einbeschriebenes Rechteck

a) Flächeninhalt des Trapezes berechnen.

b) P(2 ; y) liegt auf CD, ist Eckpunkt des einbeschriebenen Rechtecks. Rechteck in Figur eintragen und Flächeninhalt bestimmen.

c) Bewegt sich der Punkt P(x ; y) auf der Strecke CD, so ändert sich der Flächeninhalt F des zugehörigen Rechtecks. Begründe: F lässt sich mit der Gleichung F = x(-1,5x+15) berechnen.

d) Einbeschriebenes Rechteck mit größtem Flächeninhalt bestimmen, Vorgehensweise begründen.



1. Die Netzwerkstruktur mathematischen Wissens

Beispielaufgabe (Bildungsstandards)

Gegeben:

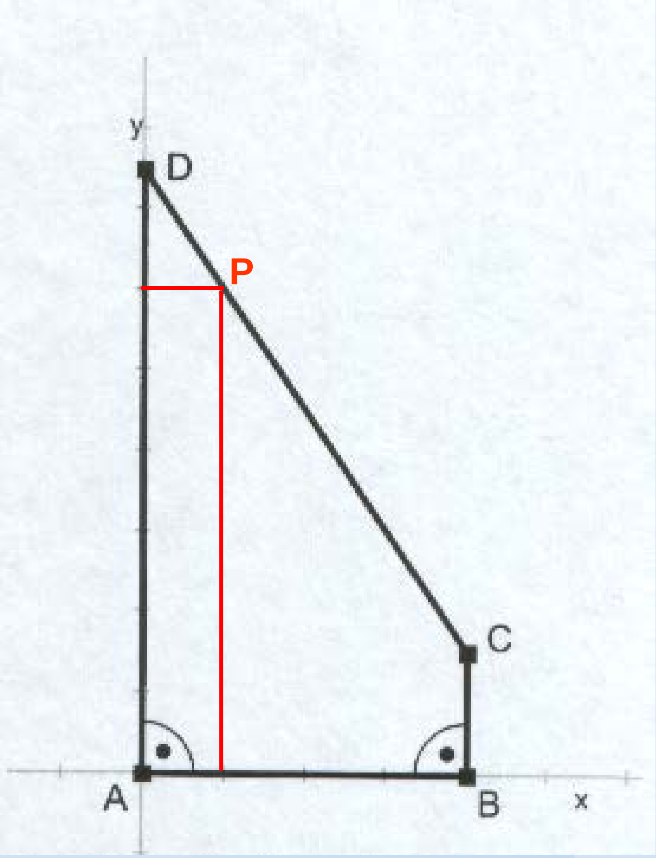
Trapez mit A(0 ; 0), B(8 ; 0), C(8 ; 3), D(0 ; 15), einbeschriebenes Rechteck

a) Flächeninhalt des Trapezes berechnen.

b) P(2 ; y) liegt auf CD, ist Eckpunkt des einbeschriebenen Rechtecks. Rechteck in Figur eintragen und Flächeninhalt bestimmen.

c) Bewegt sich der Punkt P(x ; y) auf der Strecke CD, so ändert sich der Flächeninhalt F des zugehörigen Rechtecks. Begründe: F lässt sich mit der Gleichung F = x(-1,5x+15) berechnen.

d) Einbeschriebenes Rechteck mit größtem Flächeninhalt bestimmen, Vorgehensweise begründen.



1. Die Netzwerkstruktur mathematischen Wissens

Beispielaufgabe (Bildungsstandards)

Gegeben:

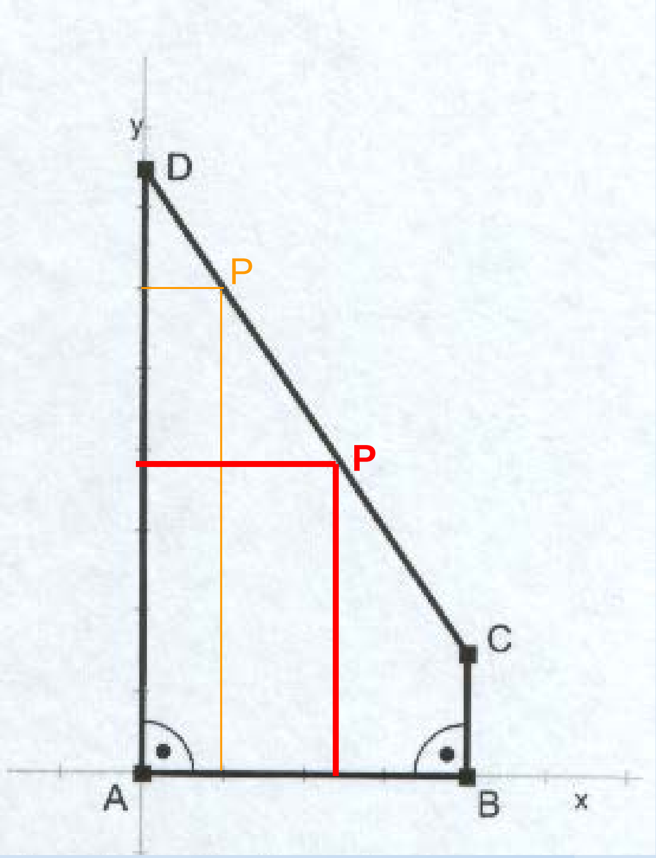
Trapez mit A(0 ; 0), B(8 ; 0), C(8 ; 3), D(0 ; 15), einbeschriebenes Rechteck

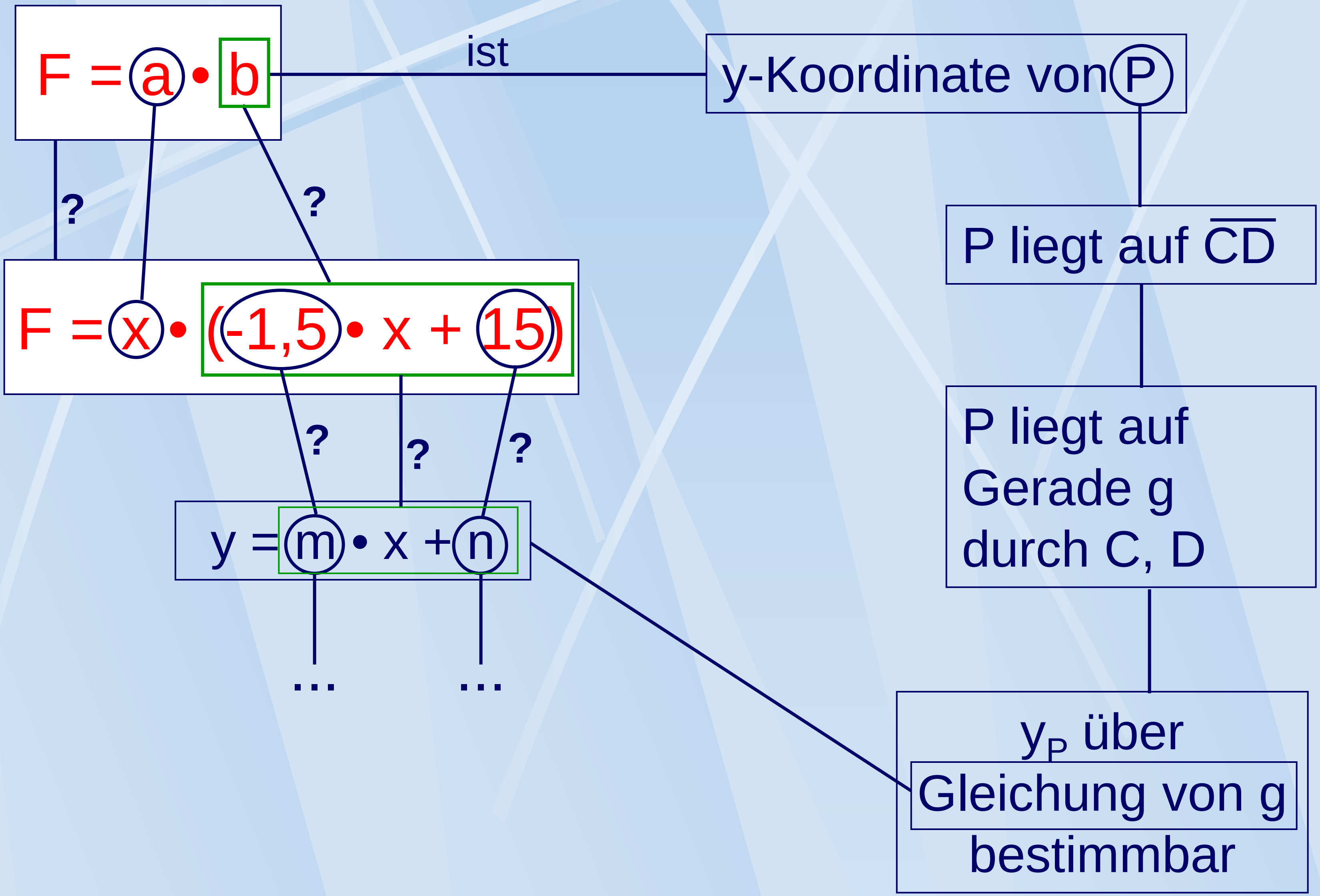
a) Flächeninhalt des Trapezes berechnen.

b) P(2 ; y) liegt auf CD, ist Eckpunkt des einbeschriebenen Rechtecks. Rechteck in Figur eintragen und Flächeninhalt bestimmen.

c) Bewegt sich der Punkt P(x ; y) auf der Strecke CD, so ändert sich der Flächeninhalt F des zugehörigen Rechtecks. Begründe: F lässt sich mit der Gleichung $F = x(-1,5x+15)$ berechnen.

d) Einbeschriebenes Rechteck mit größtem Flächeninhalt bestimmen, Vorgehensweise begründen.





F = a • b
ist
y-Koordinate von P
?
?
F = x • (-1,5 • x + 15)
P liegt auf CD
?
?
?
y = m • x + n
P liegt auf
Gerade g
durch C, D
…
…
yP über
Gleichung von g
bestimmbar

1. Die Netzwerkstruktur mathematischen Wissens

Beispielaufgabe (Bildungsstandards)

Gegeben:

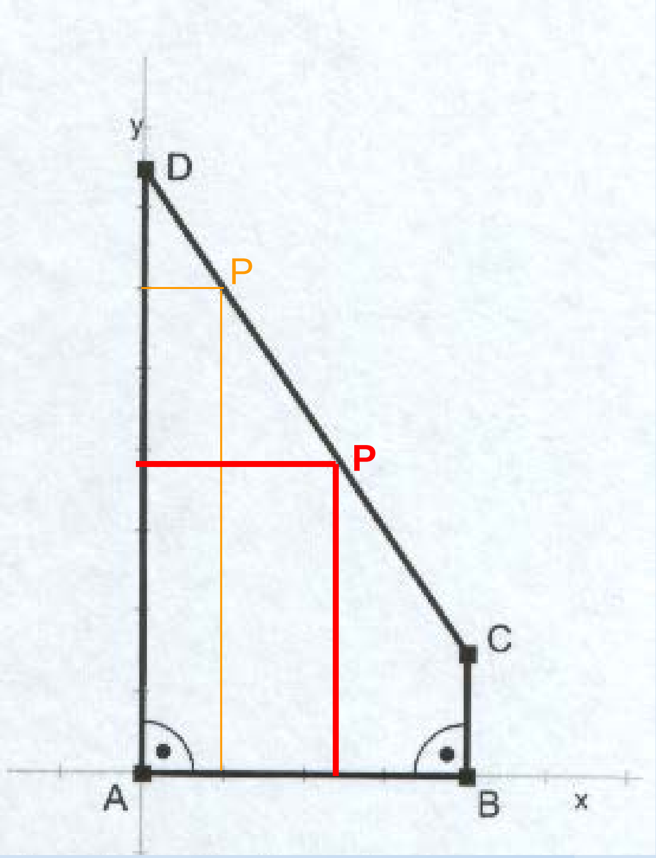
Trapez mit A(0 ; 0), B(8 ; 0), C(8 ; 3), D(0 ; 15), einbeschriebenes Rechteck

a) Flächeninhalt des Trapezes berechnen.

b) P(2 ; y) liegt auf CD, ist Eckpunkt des einbeschriebenen Rechtecks. Rechteck in Figur eintragen und Flächeninhalt bestimmen.

c) Bewegt sich der Punkt P(x ; y) auf der Strecke CD, so ändert sich der Flächeninhalt F des zugehörigen Rechtecks. Begründe: F lässt sich mit der Gleichung F = x(-1,5x+15) berechnen.

d) Einbeschriebenes Rechteck mit größtem Flächeninhalt bestimmen, Vorgehensweise begründen.



2. Defizite in Lehr- und Lernprozessen

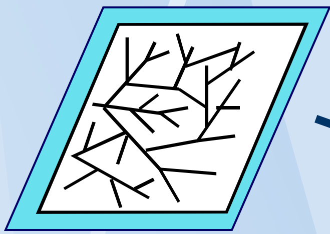
Verfolgung von Vernetzungen bei ihrer Übertragung durch **Lehr- und Lernprozesse** aus dem Unterrichtsstoff Mathematik auf die kognitive Ebene von Lernenden zwecks **Lokalisierung und Präzisierung von Defiziten**.

Untersuchung am Beispiel 2x2 LGS in der SI

(Brinkmann, 2002)

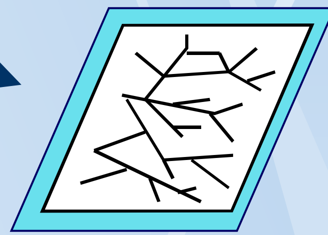
Modell der Curriculumsrahmen:
Ein Ansatz zur Spezifizierung von Vernetzungen in Lehr- und Lernprozessen

Intendiertes Curriculum



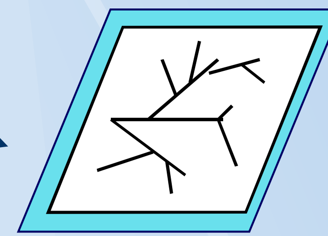
- **Richtlinien Lehrpläne**
- **Schulbücher**

Implementiertes Curriculum



- **Im Unterricht behandelte Inhalte**

Erreichtes Curriculum

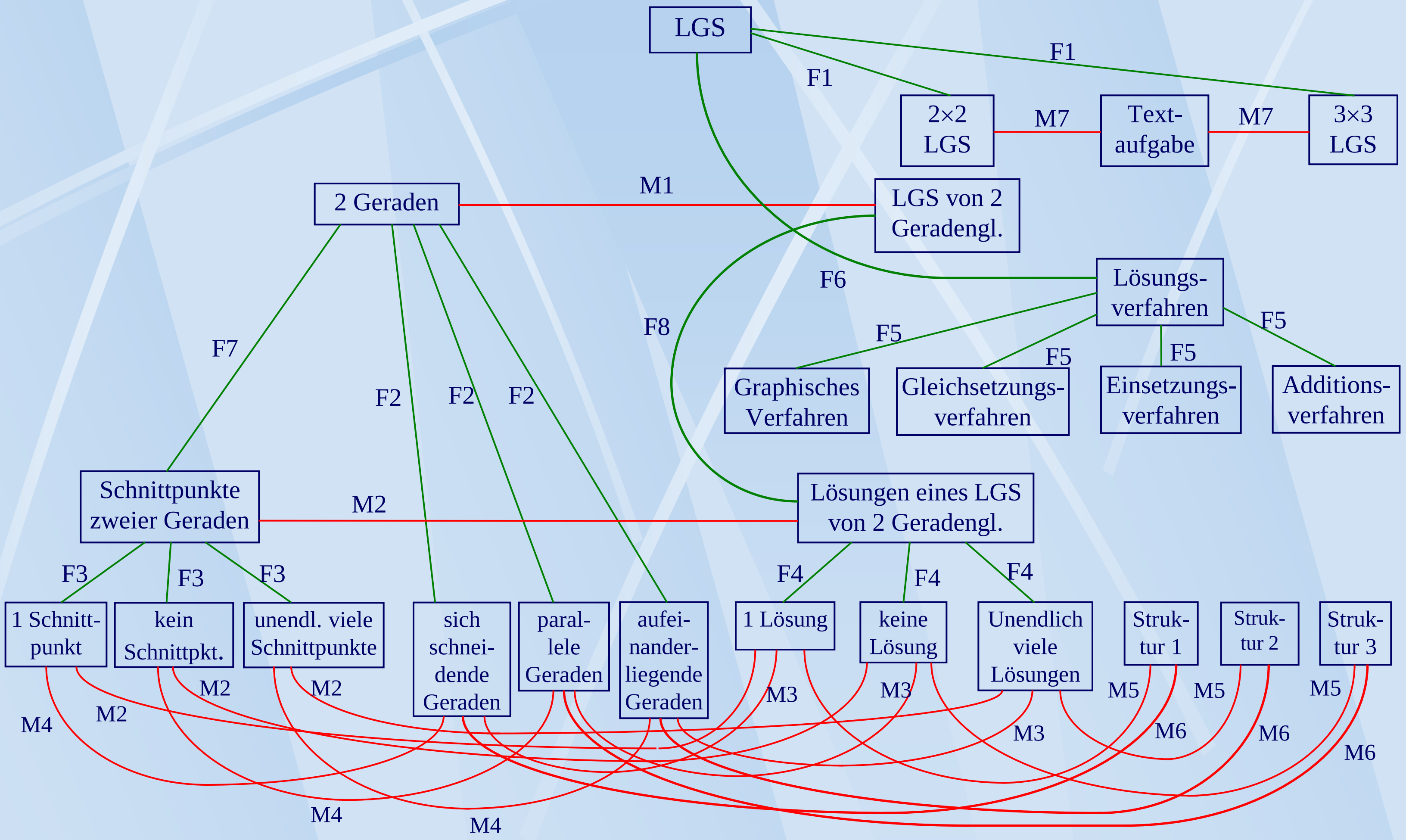


- **Von Schüler/innen erworbenes Wissen**

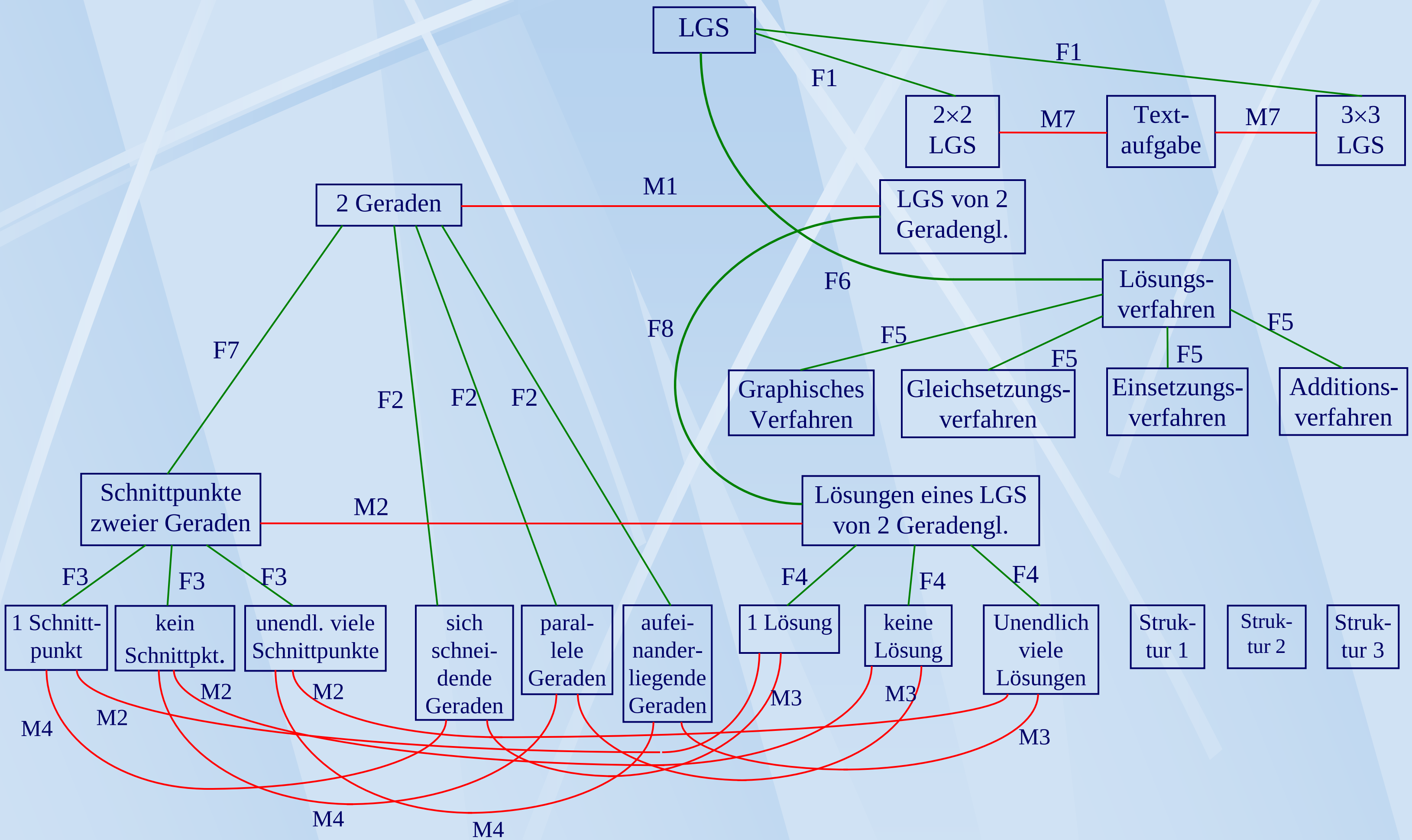
Die Curriculumsrahmen dienen als Kontrollinstanzen zur Verfolgung von Vernetzungen mathematischer Objekte in Lehr- und Lernprozessen.

Bildquellen: Buch: https://pixabay.com/de/photos/icon/?cat=education
Lehrer Lämpel: https://de.wikipedia.org/wiki/Lehrer
Schüler: https://pixabay.com/de/schule-buch-m%C3%A4dchen-menschen-lesen-148615/

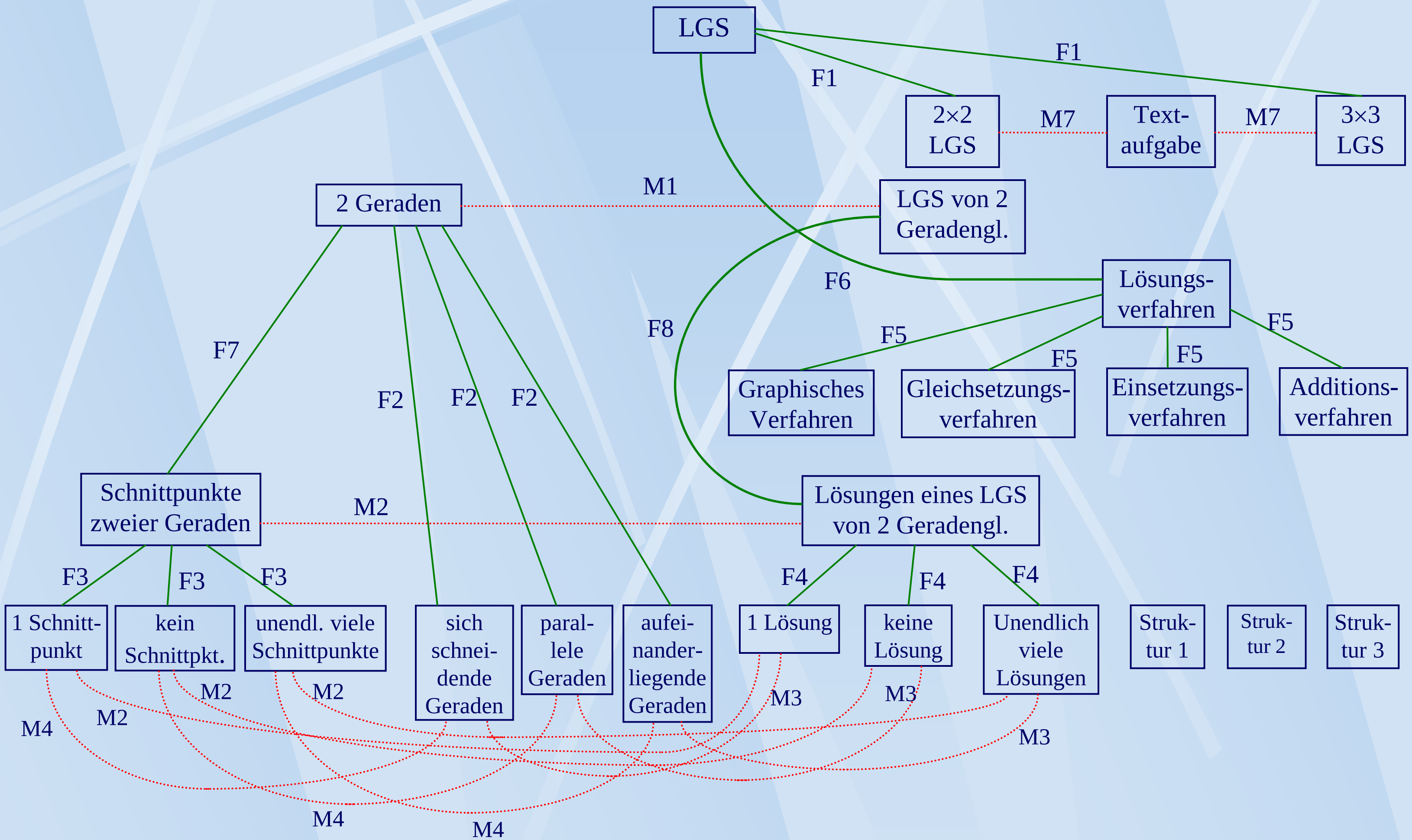
Netzwerk im Rahmen des intendierten Curriculums



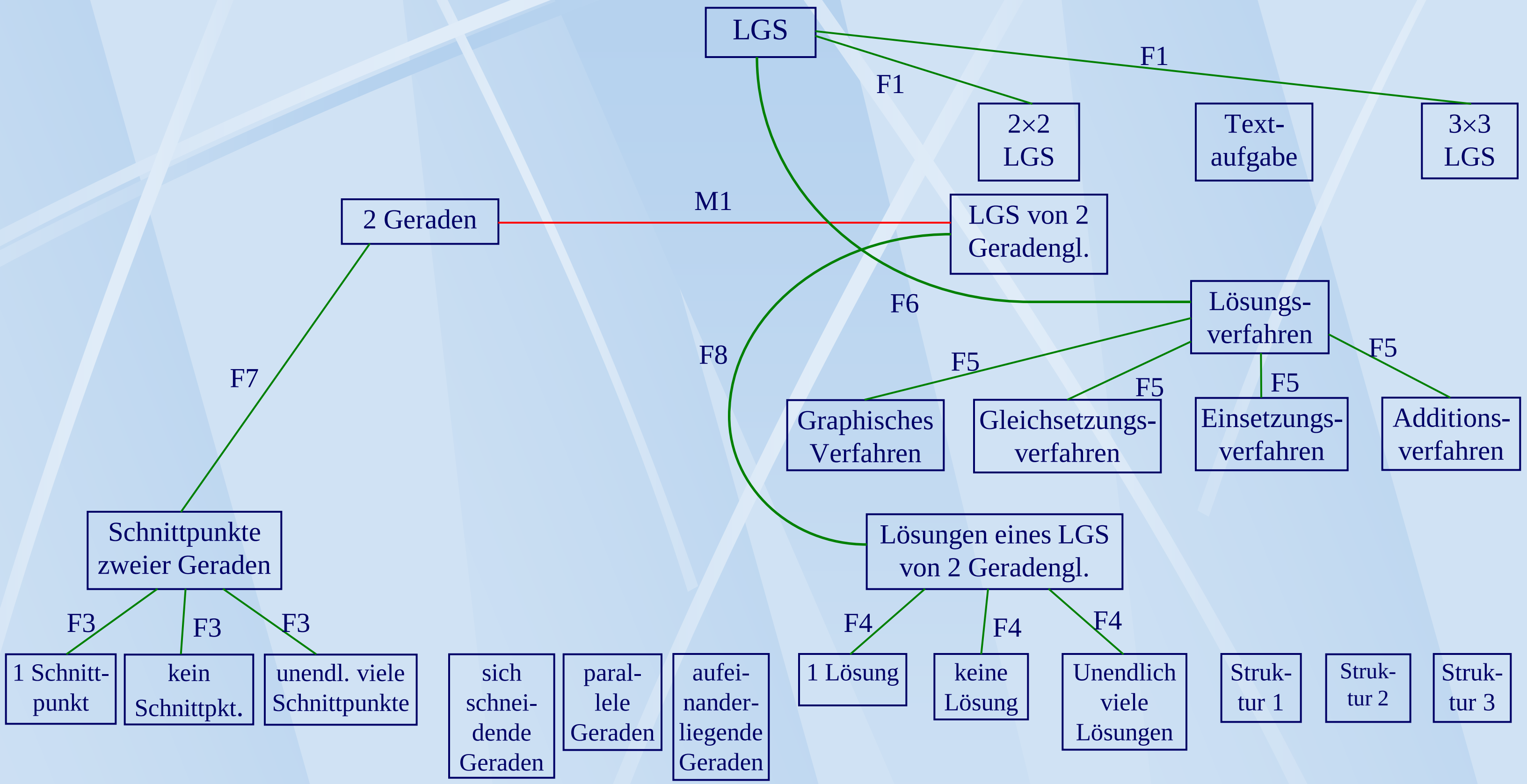
Netzwerk im Rahmen des implementierten Curriculums



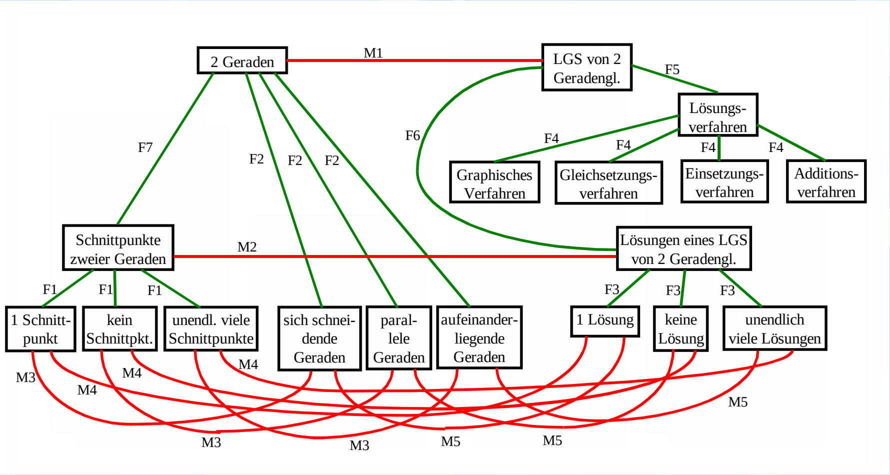
Netzwerk im Rahmen des vermeintlich erreichten Curriculums



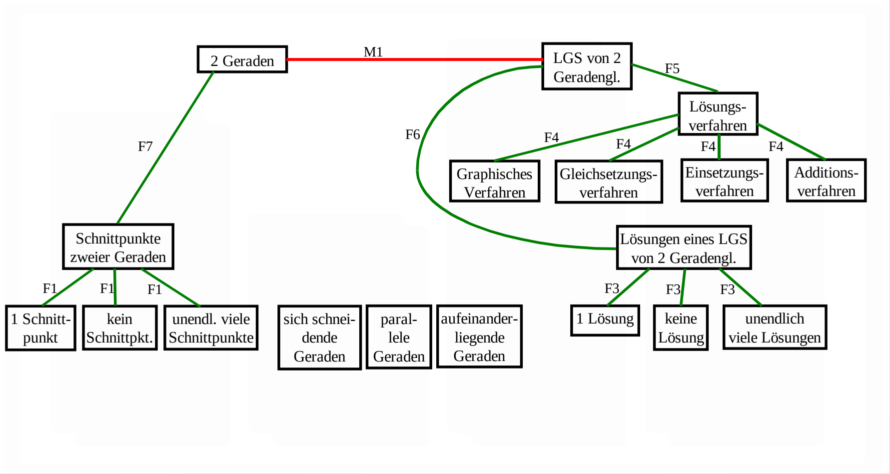
Netzwerk im Rahmen des erreichten Curriculums



Vernetzungen in curricularen Rahmungen – 2x2 LGS in der SI



Netzwerk zum intendierten und zum implementierten Curriculum



Netzwerk zum erreichten Curriculum

2. Defizite in Lehr- und Lernprozessen

Zwischenergebnisse:

- ≈ 2000: I. d. R. recht vernetzungsarme Darstellung mathematischer Inhalte in **Schulbüchern**; insbesondere wenig Querverbindungen z. B. zwischen Geometrie und Algebra, verschiedenen Darstellungen mathematischer Objekte

Allerdings, lt. Untersuchung von 18 Mathematikschulbüchern, die nach 2000 herausgegeben wurden (Sebastian Rezat 2008 in JMD):

Im Vergleich zu älteren Schulbüchern sind viele Elemente neu hinzugekommen, die Inhalte einzelner Lerneinheiten verknüpfen.

(kapitelübergreifende Aufgaben, Anwendungsbeispiele, Zusammenfassungen am Ende eines Kapitels, vermischte Aufgaben)

- Lehrer unterrichten i. d. R. nach Schulbuch oder verwenden Materialien, die ohne größeren Aufwand im Unterricht eingesetzt werden können. *(Brinkmann, 2008, n≈350, noch nicht veröffentlicht)*

2. Defizite in Lehr- und Lernprozessen

Zwischenergebnisse:

- Im Schulbuch/Unterricht vernetzungsreich dargestellte Inhalte werden von SuS **nicht nachhaltig** in dieser Weise gelernt; insbesondere **fehlen „Querverbindungen“** zw. verschiedenen Repräsentationen mathematischer Objekte.
- SuS zeigen erhebliche **Defizite im Anwenden** vernetzten Wissens / im Vernetzen im Zuge von Problemlöseprozessen

Folgerungen:

- ➢ **veränderte Unterrichtsmethodik (mit entsprechendem Angebot an Lehrerfortbildungen)**
- ➢ **andere (erweiterte) Aufgabenkultur**

3. Graphische Darstellungen mathematischen Wissens

Mind Maps und Concept Maps

Spezielle Graphen zur Visualisierung der Begriffe (concepts) rund um ein Thema mit ihren Beziehungen untereinander

- geeignete Mittel zur Repräsentation vernetzten mathematischen Wissens
- bislang im MU wenig eingesetzt

3. Graphische Darstellungen mathematischen Wissens

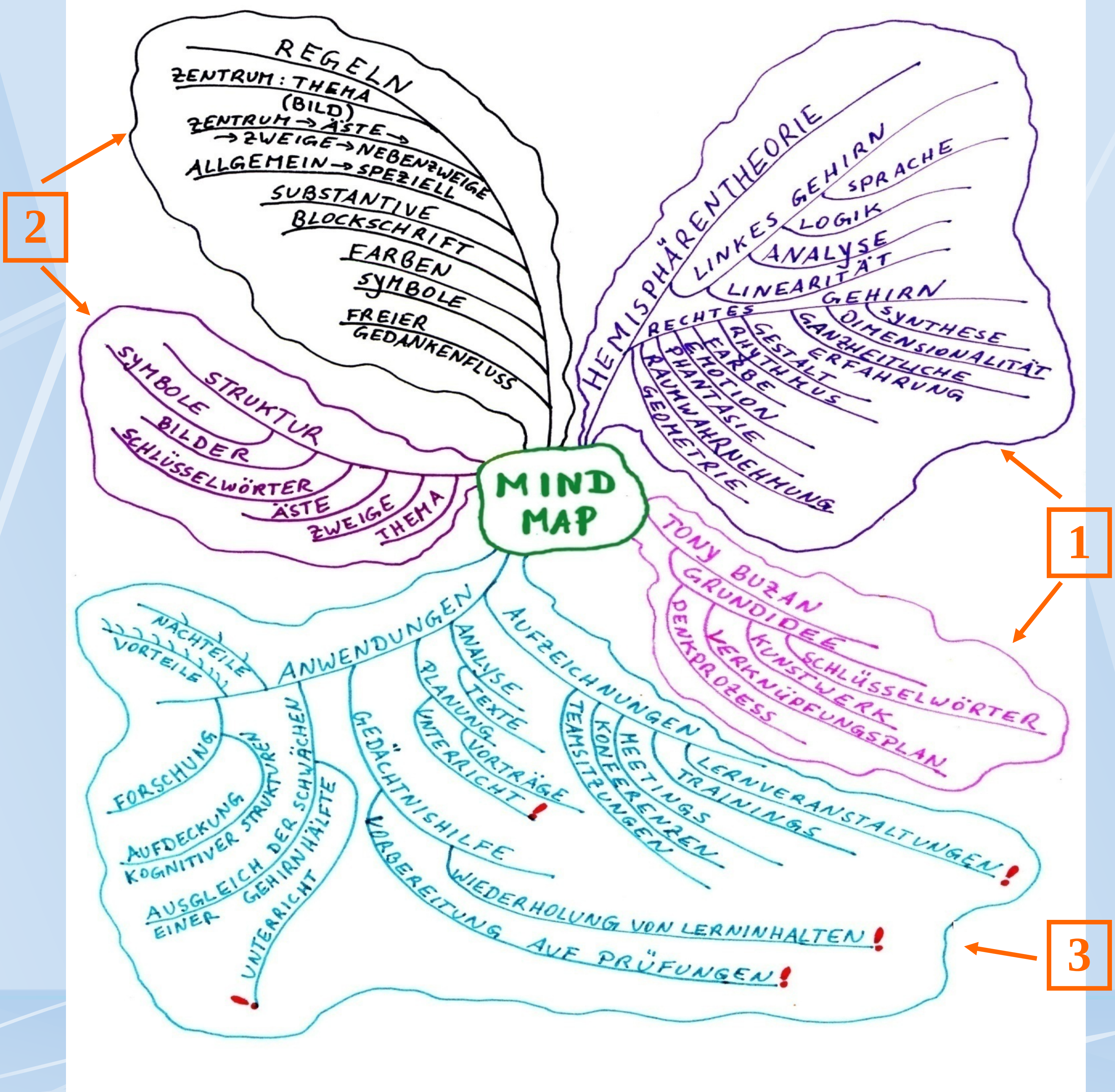
- Mind Mapping (T. Buzan):

  kreative Denk- und Schreibtechnik

- Concept Mapping (Novak):

  Aufdeckung kognitiver Strukturen, Erkennen bereits vorhandenen Wissens eines Individuums

3.1 Mind Maps



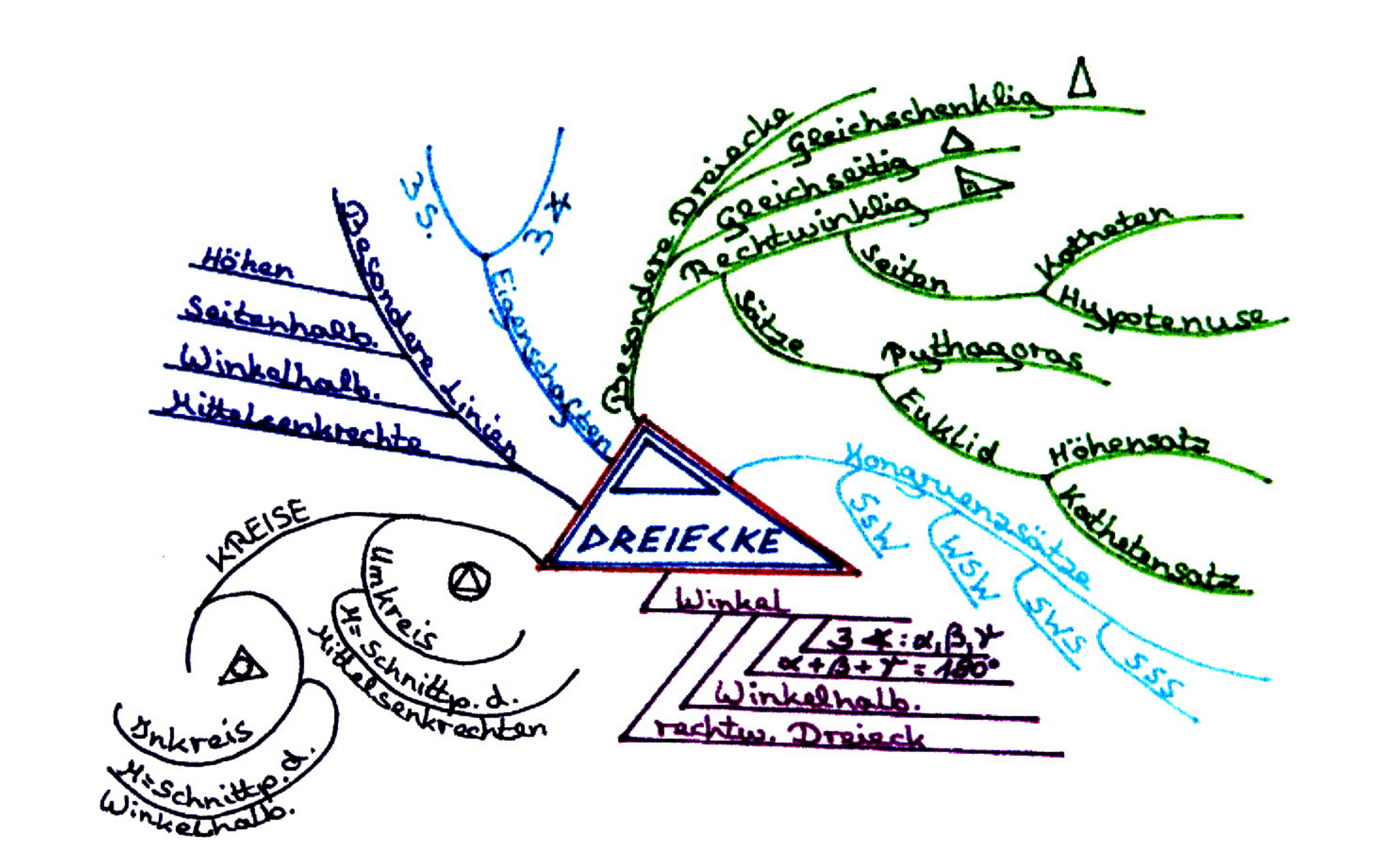
MIND MAP
REGELN
ZENTRUM: THEMA (BILD)
ZENTRUM → ÄSTE → ZWEIGE → NEBENZWEIGE
ALLGEMEIN → SPEZIELL
SUBSTANTIVE
BLOCKSCHRIFT
FARBEN
SYMBOLE
FREIER GEDANKENFLUSS
STRUKTUR
SYMBOLE
BILDER
SCHLÜSSELWÖRTER
ÄSTE
ZWEIGE
THEMA
HEMISPHÄRENTHEORIE
LINKES GEHIRN
SPRACHE
LOGIK
ANALYSE
LINEARITÄT
RECHTES GEHIRN
SYNTHESE
DIMENSIONALITÄT
GANZHEITLICHE ERFAHRUNG
GESTALT
RHYTHMUS
FARBE
EMOTION
PHANTASIE
RAUMWAHRNEHMUNG
GEOMETRIE
TONY BUZAN
GRUNDIDEE
SCHLÜSSELWÖRTER
KUNSTWERK
VERKNÜPFUNGSPLAN
DENKPROZESS
ANWENDUNGEN
NACHTEILE
VORTEILE
FORSCHUNG
AUFDECKUNG KOGNITIVER STRUKTUREN
AUSGLEICH DER SCHWÄCHEN EINER GEHIRNHÄLFTE
UNTERRICHT!
GEDÄCHTNISHILFE
WIEDERHOLUNG VON LERNINHALTEN!
VORBEREITUNG AUF PRÜFUNGEN!
PLANUNG
UNTERRICHT!
ANALYSE
TEXTE
VORTRÄGE
AUFZEICHNUNGEN
TEAMSITZUNGEN
KONFERENZEN
MEETINGS
TRAININGS
LERNVERANSTALTUNGEN!
1
2
3

3.1 Mind Maps

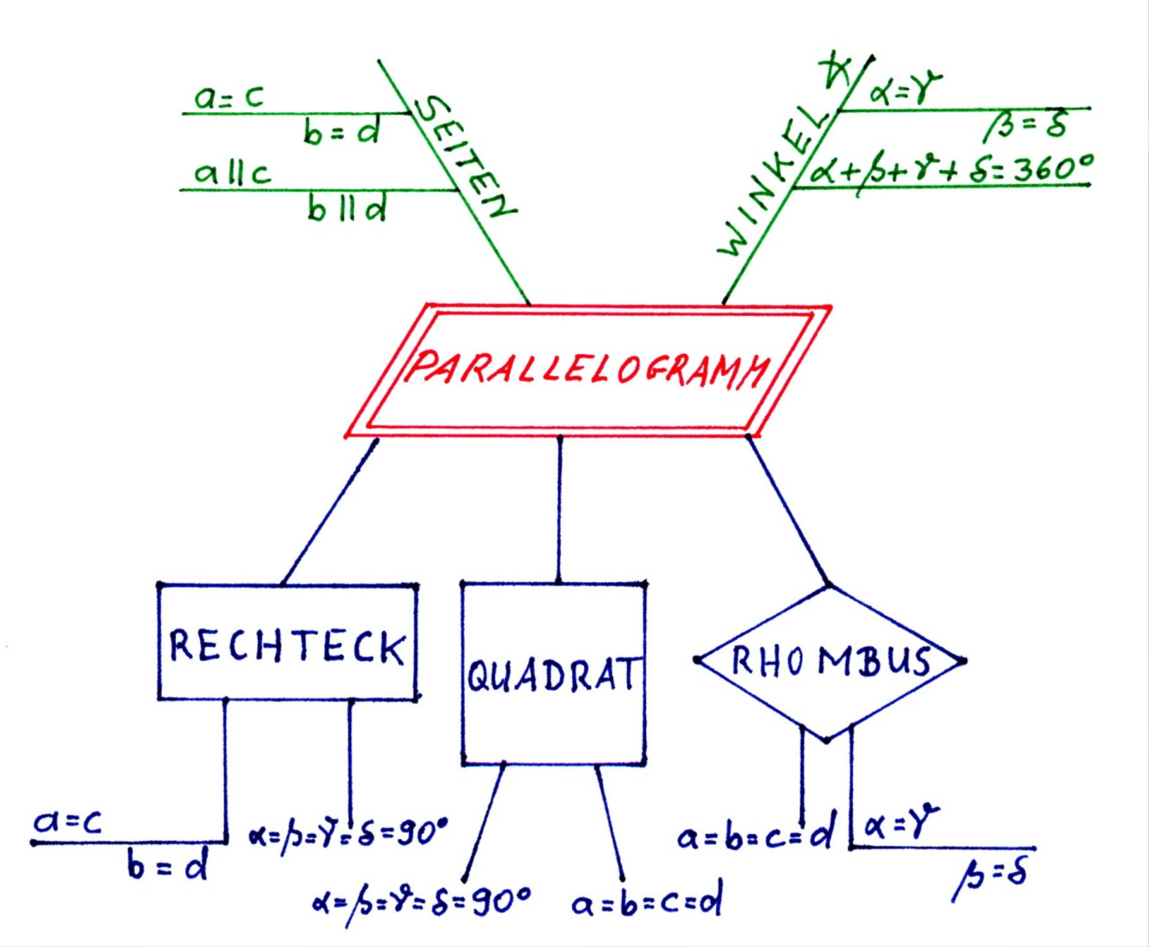
Grundregeln des Mind Mapping

1. **Das Thema wird in die Mitte gesetzt.**
2. **Ausgehend von dem zentralen Bild/Wort wird für jeden tiefergehenden Gedanken/Unterpunkt eine Linie („Ast“) gezeichnet; die einzelnen Unterpunkte werden durch Schlüsselwörter an den Linien festgehalten.**
3. **Ausgehend von den eingezeichneten Linien können weitere Linien („Nebenäste“/„Zweige“) zur Untergliederung der Hauptgedanken abzweigen. Weitere Verästelungen können sich anschließen. Die innere Ordnung gehorcht dabei folgendem Prinzip: Vom Abstrakten zum Konkreten, vom Allgemeinen zum Speziellen.**
4. **Man verwendet durchgängig Farben.**
5. **Symbole wie z.B. Pfeile, geometrische Figuren, kleine Bilder, gemalte Ausrufungs- oder Fragezeichen und selbst definierte Sinnbilder sind so oft wie möglich zu nutzen.**

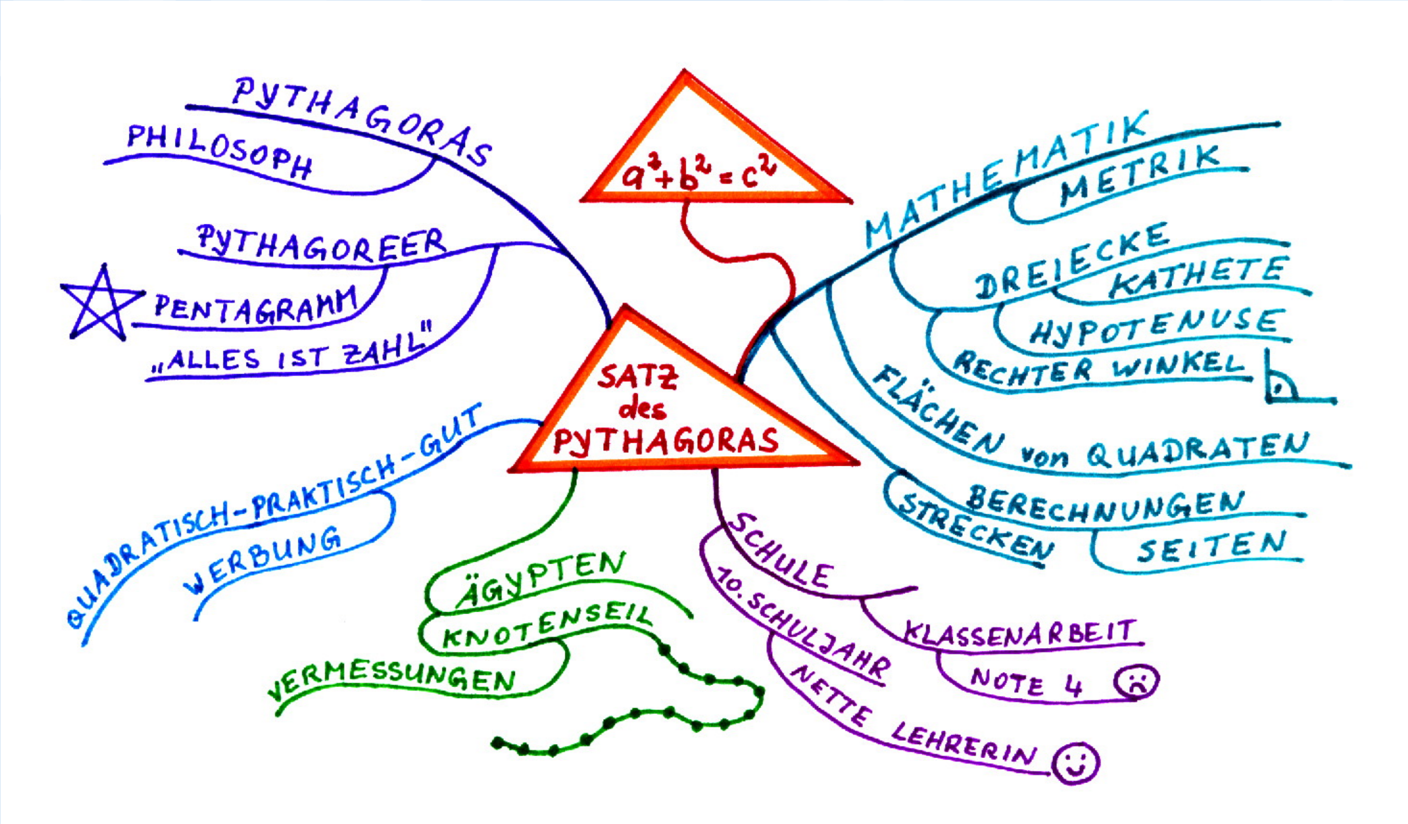
3.1 Mind Maps


DREIECKE
Besondere Dreiecke
Gleichschenklig
Gleichseitig
Rechtwinklig
Seiten
Katheten
Hypotenuse
Sätze
Pythagoras
Euklid
Höhensatz
Kathetensatz
Kongruenzsätze
SsW
WSW
SWS
SSS
Winkel
3 ∢: α, β, γ
α + β + γ = 180°
Winkelhalb.
rechtw. Dreieck
KREISE
Umkreis
M = Schnittp. d.
Mittelsenkrechten
Inkreis
M = Schnittp. d.
Winkelhalb.
Besondere Linien
Höhen
Seitenhalb.
Winkelhalb.
Mittelsenkrechte
Eigenschaften
3 S.
3 ∢

3.1 Mind Maps

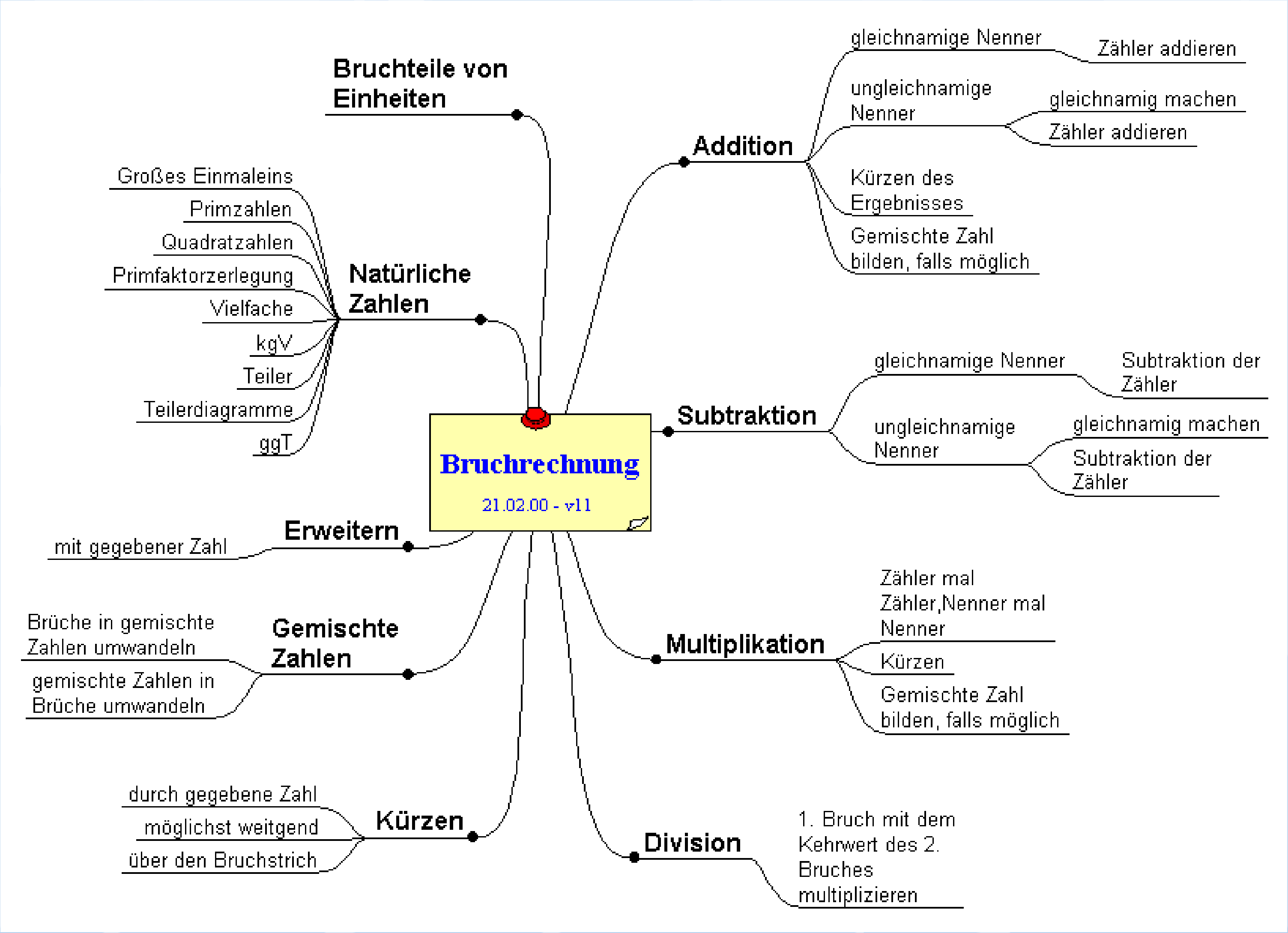

PARALLELOGRAMM
SEITEN
a=c
b=d
a||c
b||d
WINKEL ∢
α=γ
β=δ
α+β+γ+δ=360°
RECHTECK
a=c
b=d
α=β=γ=δ=90°
QUADRAT
α=β=γ=δ=90°
a=b=c=d
RHOMBUS
a=b=c=d
α=γ
β=δ

3.1 Mind Maps

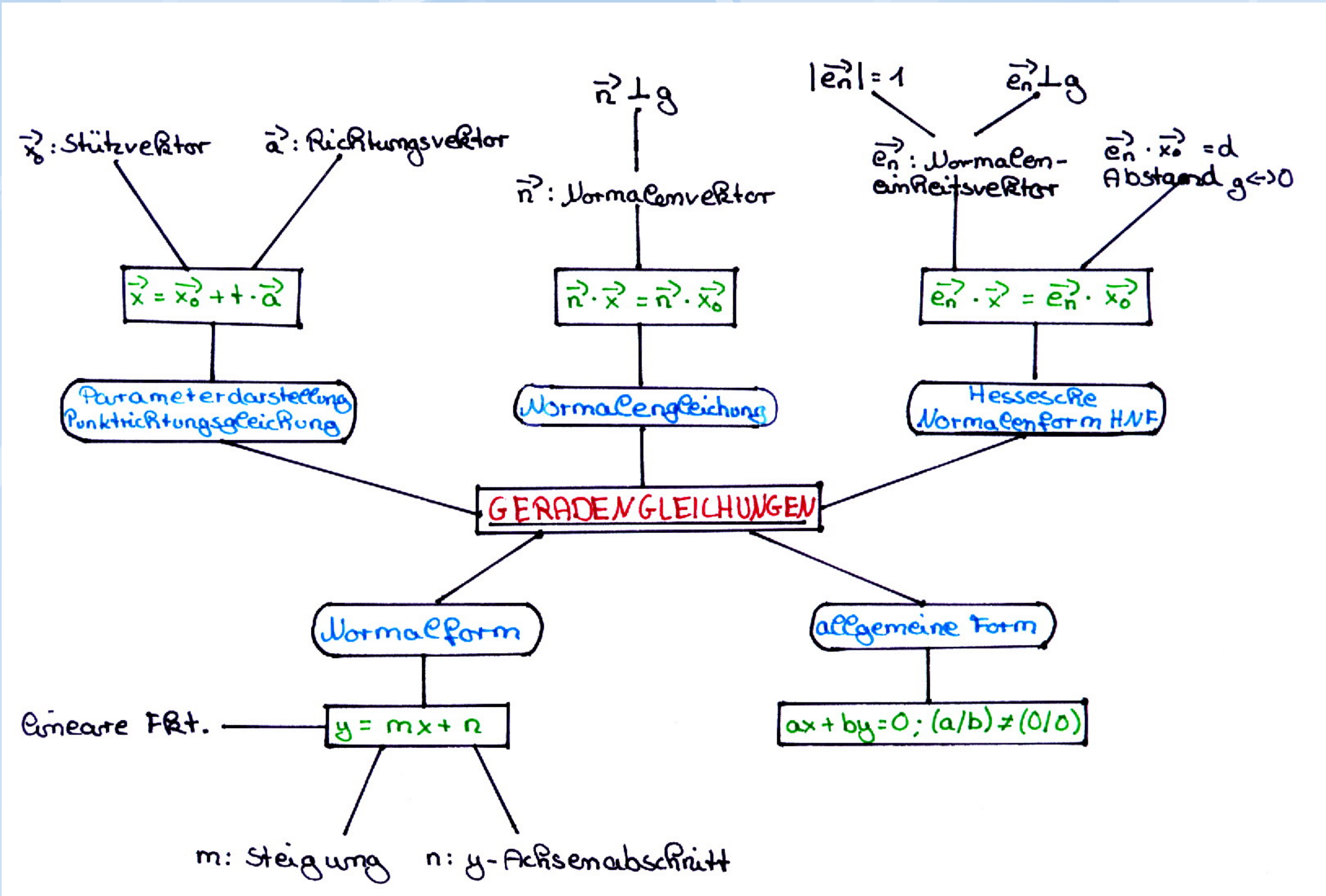


$a^2+b^2=c^2$
SATZ des PYTHAGORAS
PYTHAGORAS
PHILOSOPH
PYTHAGOREER
PENTAGRAMM
„ALLES IST ZAHL"
QUADRATISCH-PRAKTISCH-GUT
WERBUNG
ÄGYPTEN
KNOTENSEIL
VERMESSUNGEN
SCHULE
10. SCHULJAHR
NETTE LEHRERIN
KLASSENARBEIT
NOTE 4
MATHEMATIK
METRIK
DREIECKE
KATHETE
HYPOTENUSE
RECHTER WINKEL
FLÄCHEN von QUADRATEN
BERECHNUNGEN
STRECKEN
SEITEN

3.1 Mind Maps


Bruchrechnung
21.02.00 - v11
Bruchteile von Einheiten
Natürliche Zahlen
Großes Einmaleins
Primzahlen
Quadratzahlen
Primfaktorzerlegung
Vielfache
kgV
Teiler
Teilerdiagramme
ggT
Erweitern
mit gegebener Zahl
Gemischte Zahlen
Brüche in gemischte Zahlen umwandeln
gemischte Zahlen in Brüche umwandeln
Kürzen
durch gegebene Zahl
möglichst weitgend
über den Bruchstrich
Addition
gleichnamige Nenner
Zähler addieren
ungleichnamige Nenner
gleichnamig machen
Zähler addieren
Kürzen des Ergebnisses
Gemischte Zahl bilden, falls möglich
Subtraktion
gleichnamige Nenner
Subtraktion der Zähler
ungleichnamige Nenner
gleichnamig machen
Subtraktion der Zähler
Multiplikation
Zähler mal Zähler,Nenner mal Nenner
Kürzen
Gemischte Zahl bilden, falls möglich
Division
1. Bruch mit dem Kehrwert des 2. Bruches multiplizieren

3.1 Mind Maps


GERADENGLEICHUNGEN
Parameterdarstellung Punktrichtungsgleichung
$\vec{x} = \vec{x_0} + t \cdot \vec{a}$
$\vec{x_0}$: Stützvektor
$\vec{a}$: Richtungsvektor
Normalengleichung
$\vec{n} \cdot \vec{x} = \vec{n} \cdot \vec{x_0}$
$\vec{n}$: Normalenvektor
$\vec{n} \perp g$
Hessesche Normalenform HNF
$\vec{e_n} \cdot \vec{x} = \vec{e_n} \cdot \vec{x_0}$
$\vec{e_n}$: Normalen-einheitsvektor
$|\vec{e_n}| = 1$
$\vec{e_n} \perp g$
$\vec{e_n} \cdot \vec{x_0} = d$
Abstand g<->0
Normalform
$y = mx + n$
lineare Fkt.
m: Steigung
n: y-Achsenabschnitt
allgemeine Form
$ax + by = 0; (a/b) \neq (0/0)$

3.1 Mind Maps

Mathematik-Mind Maps

- **Struktur einer Mind Map – Struktur der Mathematik:**

  „Die Mathematik wird oft als ein gewaltiger Stammbaum dargestellt, dessen Wurzeln, Stamm, Äste und Zweige die verschiedenen Unterarten repräsentieren; ein Baum, der mit der Zeit heranwächst.” [Davis & Hersh, 1986]

- **Mathematisches Denken läuft in beiden Gehirnhälften ab: geometrisches Denken größtenteils im rechten Gehirn, analytisches Denken im linken Gehirn.**

  “Wir sind der Meinung, daß es besser ist für die Mathematik, wenn die beiden Gehirnhälften mit ihren Möglichkeiten zusammenwirken, sich ergänzen und gegenseitig steigern, anstatt sich zu bekämpfen und zu behindern.” [Davis & Hersh, 1986]

3.1 Mind Maps

Einführung im Unterricht

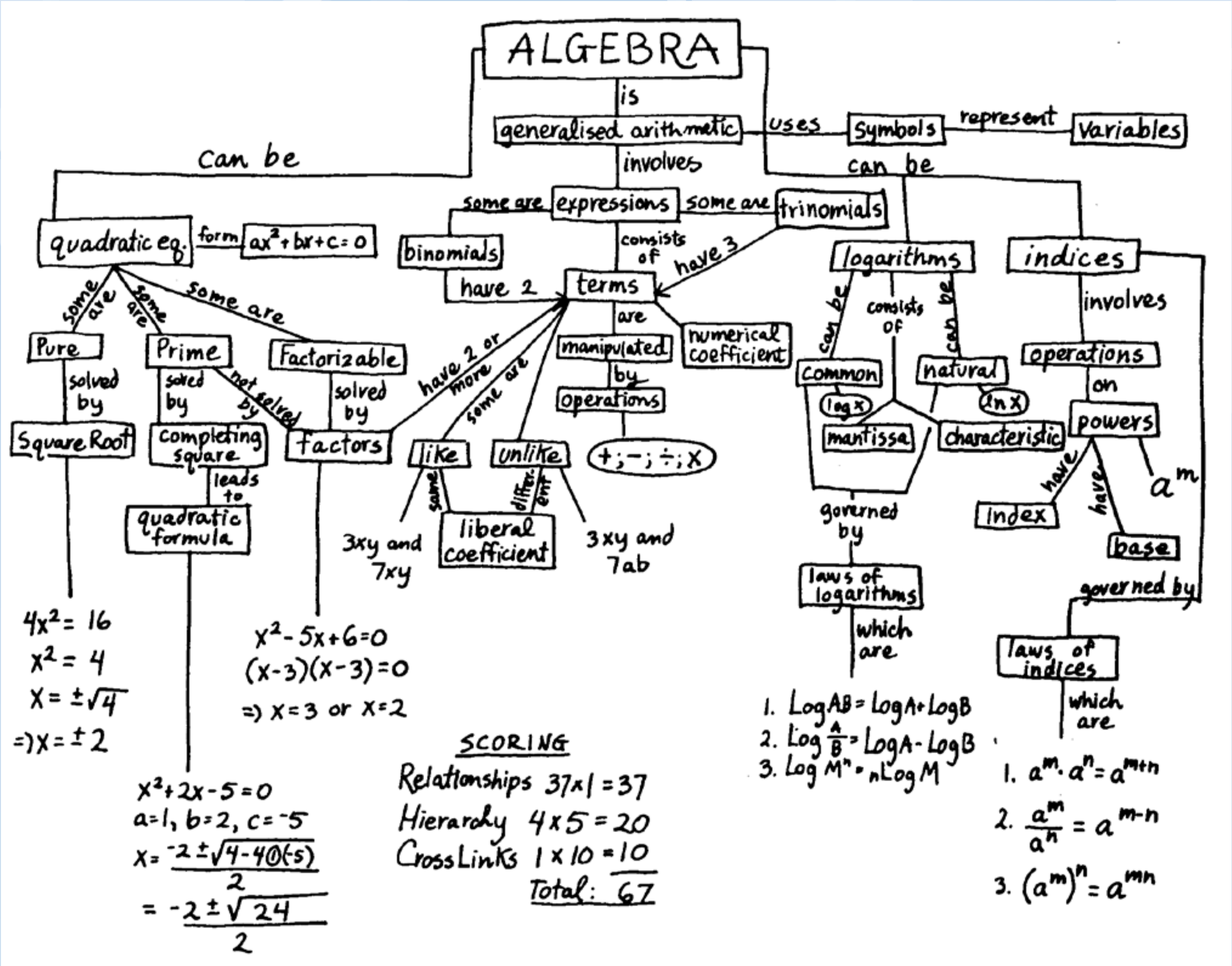
1. **Brain Storming: die Schüler sammeln Begriffe, die sie mit einer vorgegebenen Thematik in Verbindung bringen; der Lehrer schreibt die Begriffe an die Tafel.**
2. **Die Schüler suchen Oberbegriffe, unter denen sich mehrere der gesammelten Begriffe zusammenfassen lassen. Die Oberbegriffe werden an die Tafel geschrieben und unter jedem Oberbegriff werden die entsprechenden Unterbegriffe aufgelistet.**
3. **Mind Map: Das Thema wird in die Mitte gesetzt, die Oberbegriffe bilden die Schlüsselwörter an den Ästen und die jeweils zugehörigen Unterbegriffe die Schlüsselwörter an den entsprechenden Zweigen.**
4. **Die Schüler werden auf hilfreiche und künstlerische Ausgestaltungsmöglichkeiten ihrer Mind Maps hingewiesen. Sie werden aufgefordert, ihre bereits angefertigten Mind Maps unter Berücksichtigung dieses Aspekts nochmals zu zeichnen.**

3.2 Concept Maps

Visualisierung des Wissens von Individuen

- Die Entwicklung von Concept Maps *basiert auf Ausubels Lerntheorie*, die bereits bekannte Lerninhalte als wichtigsten Einflussfaktor für das Lernen ansieht. Das, was ein Lernender bereits weiß, gilt es zu ermitteln und danach sollte unterrichtet werden (Ausubel, Novak & Hanesian, 1980, S.5).
- Concept Maps: spezielle Graphen zur Visualisierung der Begriffe (concepts) rund um ein Thema mit ihren Beziehungen untereinander; in besonderer Weise geeignet zur Aufdeckung des deklarativen Wissens eines Individuums.

(Malone & Deckers: „Windows to the mind“)



ALGEBRA
is
generalised arithmetic
uses
Symbols
represent
Variables
can be
involves
expressions
some are
binomials
trinomials
quadratic eq.
form
ax²+bx+c=0
consists of
terms
have 2
have 3
some are
Pure
Prime
Factorizable
solved by
Square Root
completing square
not solved by
factors
leads to
quadratic formula
are
manipulated by
operations
+; −; ÷; X
numerical coefficient
have 2 or more
like
unlike
same
different
liberal coefficient
3xy and 7xy
3xy and 7ab
4x² = 16
x² = 4
x = ±√4
⇒ x = ±2
x²+2x−5=0
a=1, b=2, c=−5
x = (−2 ± √(4−4(1)(−5)))/2
= (−2 ± √24)/2
x²−5x+6=0
(x−3)(x−3)=0
⇒ x=3 or x=2
SCORING
Relationships 37×1 = 37
Hierarchy 4×5 = 20
CrossLinks 1×10 = 10
Total: 67
logarithms
can be
common
natural
log x
ln x
mantissa
characteristic
governed by
laws of logarithms
which are
1. Log AB = Log A + Log B
2. Log A/B = Log A − Log B
3. Log Mⁿ = n Log M
indices
involves
operations
on
powers
have
index
base
aᵐ
laws of indices
1. aᵐ·aⁿ = aᵐ⁺ⁿ
2. aᵐ/aⁿ = aᵐ⁻ⁿ
3. (aᵐ)ⁿ = aᵐⁿ

3.2 Concept Maps

Struktur einer Concept Map

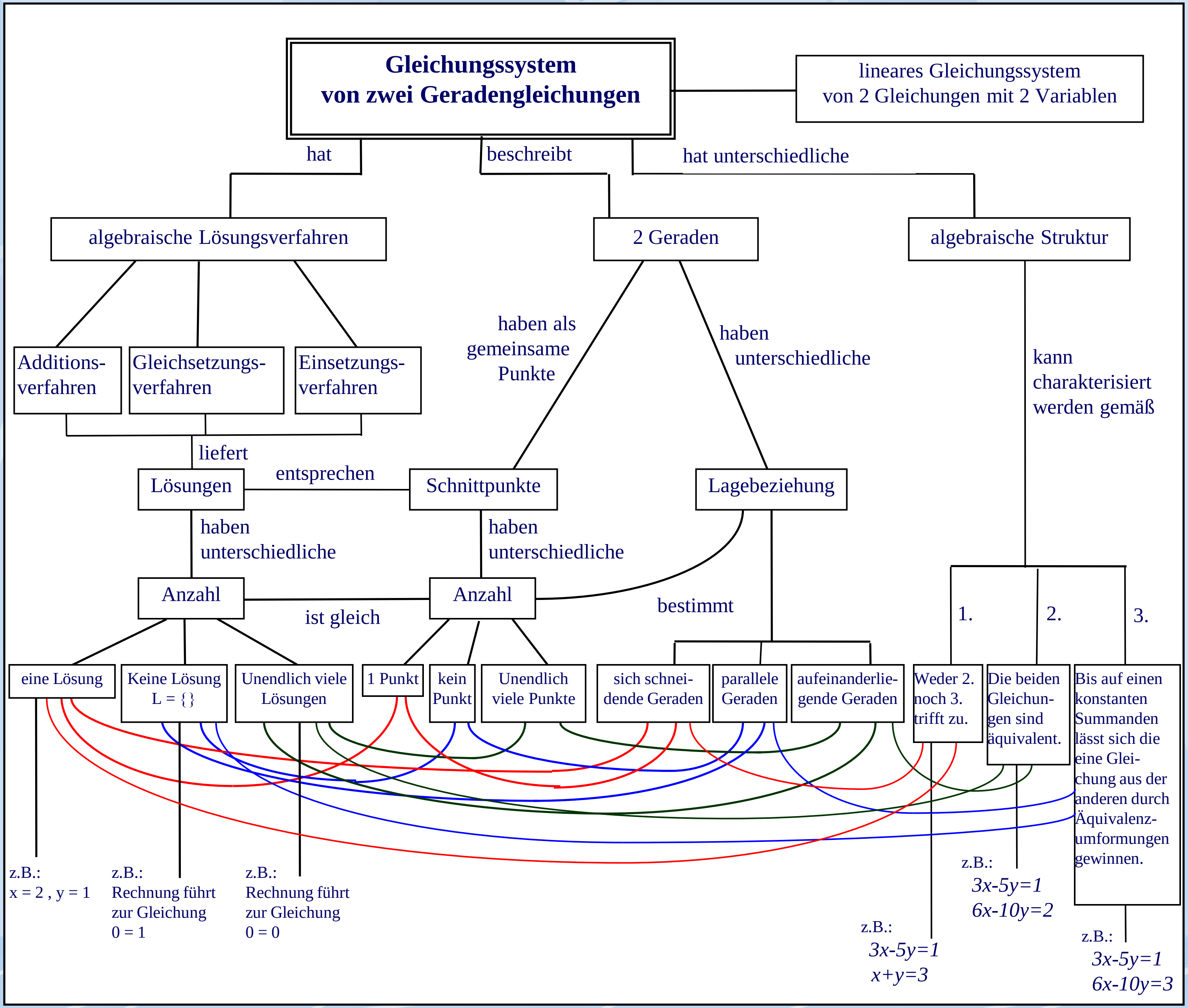
- **Hierarchisch strukturiert (Ausubels Annahme: gedächtnismäßig repräsentiertes Wissen ist hierarchisch strukturiert).**
- **Das *Thema* wird ganz oben aufgeschrieben.**
- **Darunter werden auf verschiedenen Ebenen *Begriffe* angeordnet, die in Beziehung zu diesem Thema stehen.**
- **Allgemeinere, abstraktere Begriffe werden weiter oben angeordnet und spezielle, konkrete Begriffe weiter unten platziert.**
- **Begriffe einer nachrangigen Hierarchieebene werden jeweils direkt unter die jeweiligen Begriffe der vorrangigen Hierarchieebene gesetzt, zu denen sie in unmittelbarer Beziehung stehen.**
- **Unter die letzte Begriffszeile können zu den hier aufgeführten einzelnen Begriffen jeweils *Beispiele* angegeben werden.**

3.2 Concept Maps

Struktur einer Concept Map (Forts.)

- **Begriffe verschiedener Ebenen, aber auch derselben Ebene werden *mit Linien verbunden*, sofern sie in Beziehung zueinander stehen.**
- **Auf den *Verbindungslinien* wird durch *verbindende Wörter (linking words)* jeweils die *semantische Interpretation der Relation* zwischen den Begriffen verdeutlicht.**
- **Ist diese Relation nicht symmetrisch, so sind die Begriffe entsprechend mit einer *gerichteten Kante* verbunden, die graphisch durch einen *Pfeil* statt einer Linie dargestellt wird.**
- **Der Übersichtlichkeit halber werden die einzelnen Begriffe eingekreist oder umrahmt. Dies gilt nicht für angeführte Beispiele am unteren Ende der Concept Map.**

3.2 Concept Maps



3.2 Concept Maps

Mathematatik - Concept Maps

- ***Hierarchische Struktur:*** **insbesondere diejenigen fachsystematischen Vernetzungen, die einen hierarchischen Aufbau der Mathematik widerspiegeln, können sichtbar werden. (Diese Vernetzungen sind in der Regel durch Verbindungen zwischen Konzepten verschiedener Hierarchieebenen dargestellt.)**
- **Möglichkeit *Querverbindungen* anzugeben gestattet u.a. auch die Darstellung von Modellvernetzungen, die in der Regel Vernetzungen von Konzepten derselben Hierarchieebene anzeigen. (Besonderer Vorteil von Concept Maps z.B. gegenüber Mind Maps.)**

3.2 Concept Maps

Einführung im Unterricht

- **Die Schüler suchen zunächst aus einem Text Schlüsselbegriffe heraus.**
- **Diese werden an der Tafel oder mittels OHP aufgelistet.**
- **Im Klassengespräch wird ein Oberbegriff gefunden, der dann an die Spitze einer neuen Liste von Begriffen gesetzt wird. In dieser neuen Liste werden die Begriffe der ersten Liste in einer Reihenfolge von allgemeineren hin zu spezielleren angeordnet. Die in der Regel wenigen Differenzen über die Rangordnung der Begriffe sind nicht hinderlich, sondern sogar nützlich, zeigen sie doch den Schülern, dass es mehr als nur eine Interpretationsmöglichkeit eines Textes gibt.**
- **Man beginnt mit der Konstruktion der Concept Map, indem man sich an der Begriffshierarchie der letzten Liste orientiert.**
- **Verbindende Wörter werden zunächst für direkte Verbindungen zwischen Begriffen aufeinanderfolgender Hierarchiestufen gesucht. Bei der Wahl sollte der Lehrer helfen.**

3.3 Mind Maps und Concept Maps als Unterrichtsmittel

Mind Maps / Concept Maps

- Anwendung im MU:

- Informationen zu einem Thema ordnen und strukturieren
  - Insbesondere schwache SS profitieren, man kann die Struktur „sehen“
  - Komplexitätsgrad der Map ist entscheidend
- Wissensstrukturen einzelner werden sichtbar
  - L: Hilfe beim Planen von Unterricht
  - S: mehr Bewusstsein über die eigene Wissensorganisation
  - S: Bewusstsein über ihnen fehlende Vernetzungen (wenn Konzepte nicht eingebunden werden können)
  - Möglichkeit der Korrektur durch L (Gespräche erforderlich)

3.3 Mind Maps und Concept Maps als Unterrichtsmittel

Mind Maps / Concept Maps

- Anwendung im MU:

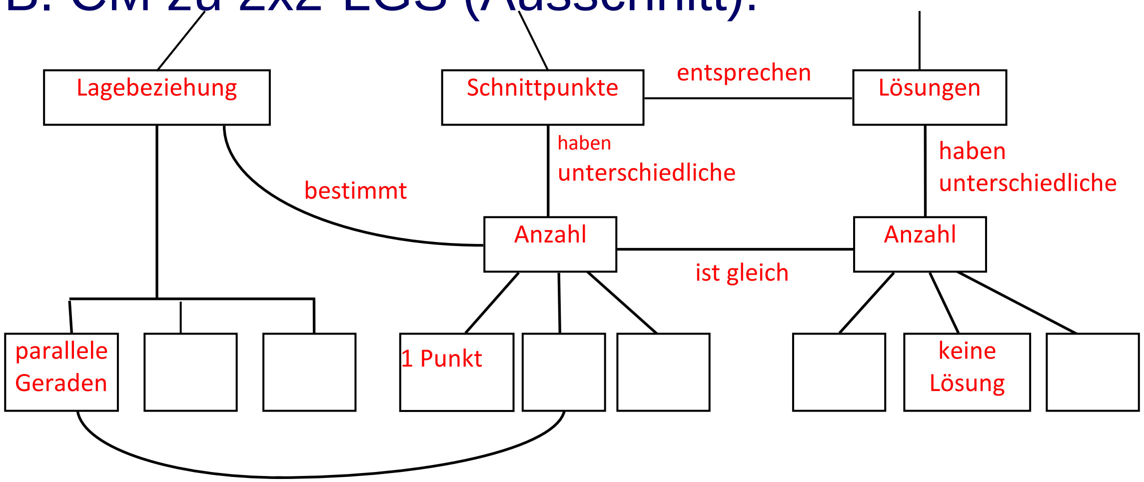
- zusammenfassende Wiederholung von Lerninhalten zu einem Thema
  - Beobachtung: SS nutzen die Methode aus eigenem Antrieb
  - Ergebnis einer Befragung: Für eine zusammenfassende Strukturierung der Lerninhalte zu einem Thema würden fast alle SS eine graphische Darstellung in Form einer Map wählen und diese einer Textform vorziehen.
- Gedächtnisstütze, das gesamte Bild wird erinnert
- MM: Wissen mehrerer kann zusammengetragen werden
  - Diskussionen zum Einordnen der Begriffe fruchtbar für das Verständnis

3.3 Mind Maps und Concept Maps als Unterrichtsmittel

Mind Maps / Concept Maps

- Anwendung im MU:

- CM als „Lückentext“
  - SS sind aufgefordert, sich intensiv und aktiv mit den Inhalten in ihrer Beziehungshaltigkeit auseinander zu setzen
  - Gestaltung so, dass bloßes Auswendiglernen nicht zum Erfolg führen kann
  - Z. B. CM zu 2x2-LGS (Ausschnitt):



3.3 Mind Maps und Concept Maps als Unterrichtsmittel

Mind Maps / Concept Maps

- Anwendung im MU:

- CM: Hilfe beim Problemlösen
  - Studie: SS mit Map erfolgreicher
  - Komplexitätsgrad der Map wichtig: Für schwächere SS sollten Concept Maps eher weniger Informationen – zu Gunsten einer besseren Übersichtlichkeit – haben
  - Lernenden sollte geholfen werden, eine von ihnen erstellte Map so zu ergänzen und zu verbessern, dass diese für weitere Lernprozesse effizienter genutzt werden kann.

3.3 Mind Maps und Concept Maps als Unterrichtsmittel

Mind Maps oder Concept Maps?

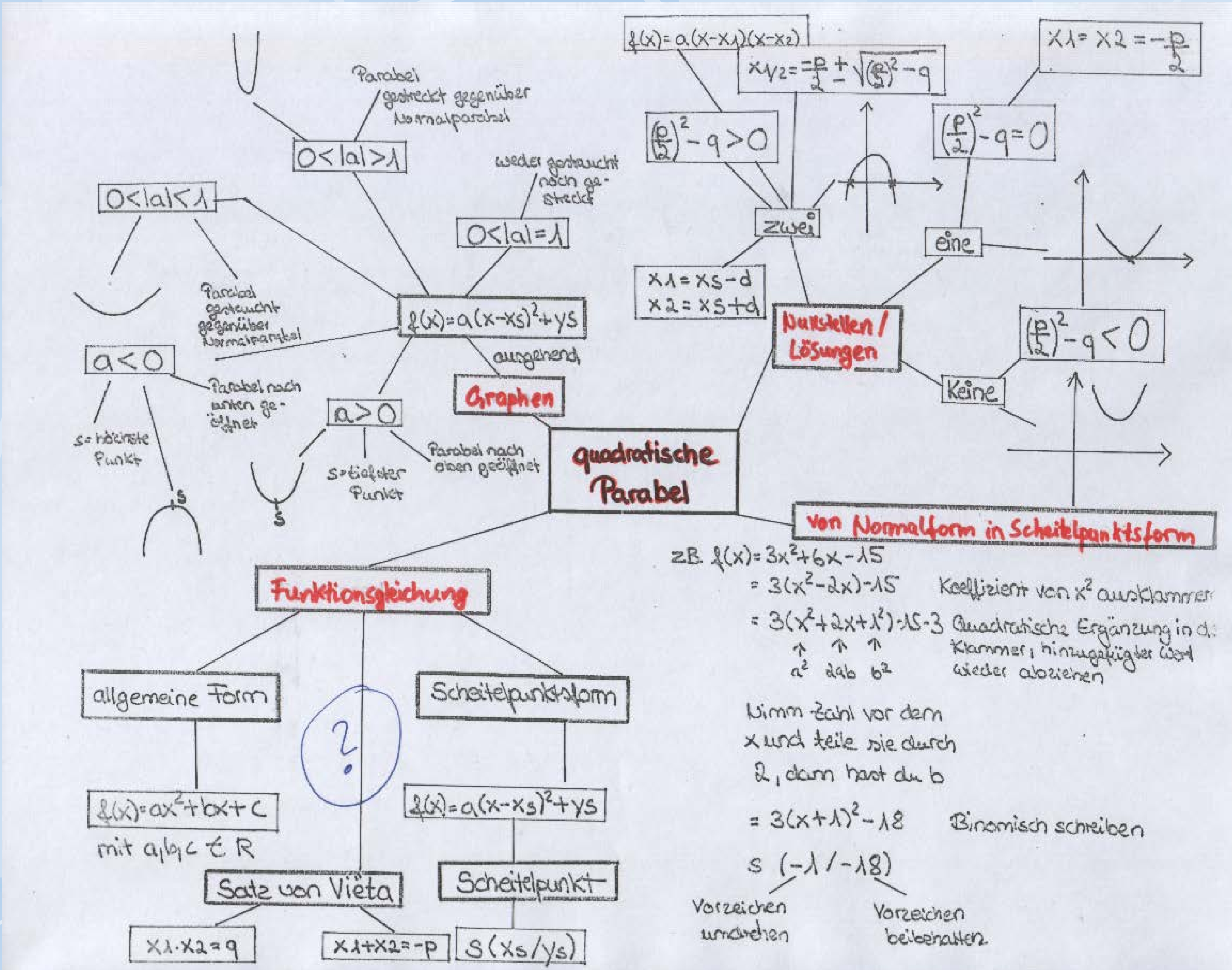
- Keine eindeutigen Präferenzen für das MMing einerseits oder das CMing andererseits
- Vorzüge der einen oder anderen Technik werden offenbar unterschiedlich gewichtet.
- Die Lernenden orientieren sich u. a. an der subjektiv empfundenen Wirkung einer Map: Die einen empfinden eine MM als übersichtlicher, die anderen eine CM.
- Mehr als ein Drittel der SS würden sich situationsbedingt mal für MMing, mal für CMing entscheiden.

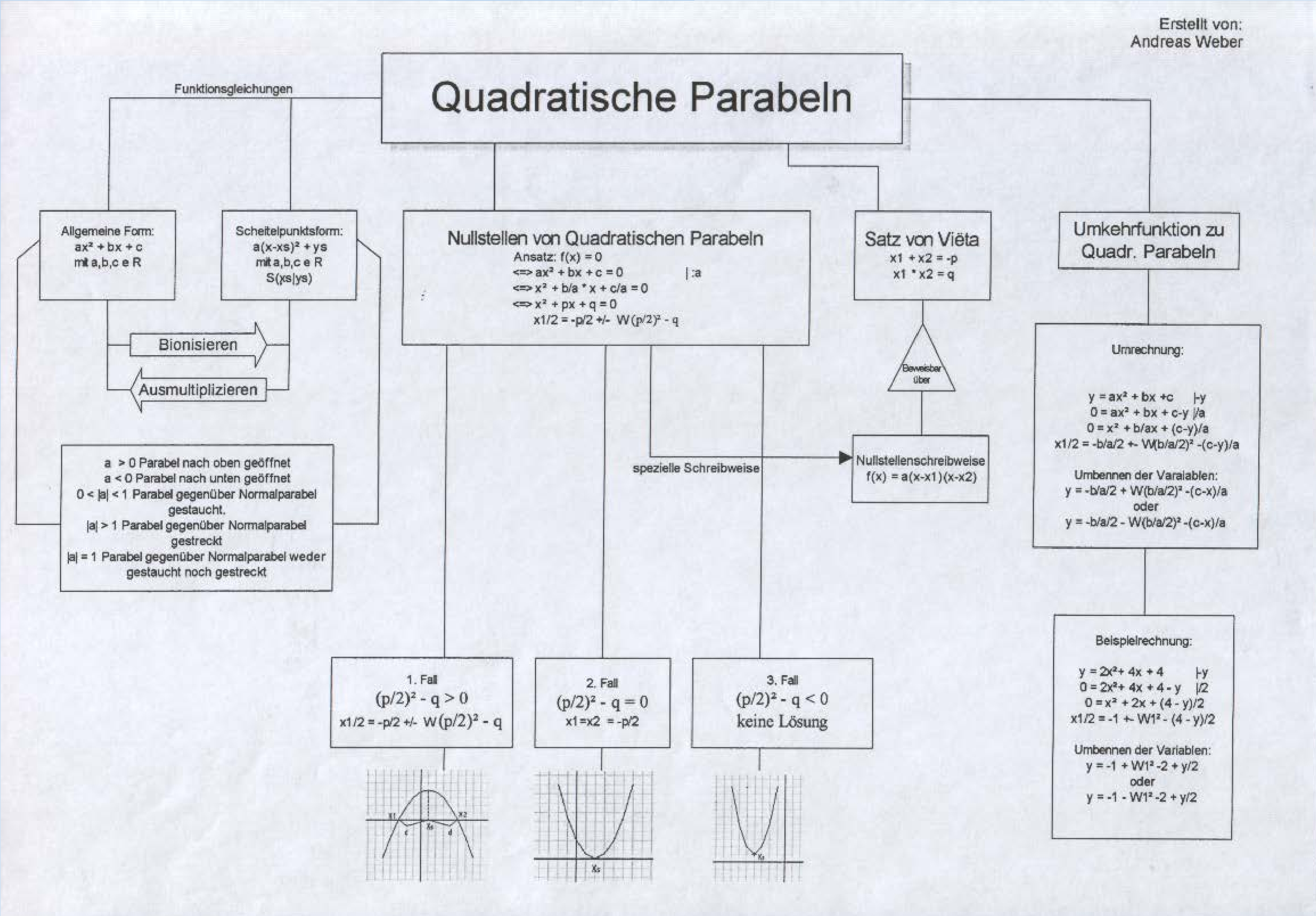
3.3 Mind Maps und Concept Maps als Unterrichtsmittel

Für eine zusammenfassende Strukturierung von Lerninhalten und auch als Hilfe in Problemlösungsprozessen wird eine *Mischform* von MM und CM, die sich in typischer Weise charakterisieren lässt, bevorzugt.

⇒ Eine Weiterentwicklung und Bereitstellung entsprechend angepasster Regeln zur vorteilhafteren Darstellung solcher Wissensnetze wäre im MU sinnvoll.

3.4 Abgewandelte Map-Formen





Erstellt von:
Andreas Weber
Quadratische Parabeln
Funktionsgleichungen
Allgemeine Form:
ax² + bx + c
mit a,b,c e R
Scheitelpunktsform:
a(x-xs)² + ys
mit a,b,c e R
S(xs|ys)
Bionisieren
Ausmultiplizieren
a > 0 Parabel nach oben geöffnet
a < 0 Parabel nach unten geöffnet
0 < |a| < 1 Parabel gegenüber Normalparabel gestaucht.
|a| > 1 Parabel gegenüber Normalparabel gestreckt
|a| = 1 Parabel gegenüber Normalparabel weder gestaucht noch gestreckt
Nullstellen von Quadratischen Parabeln
Ansatz: f(x) = 0
<=> ax² + bx + c = 0 |:a
<=> x² + b/a * x + c/a = 0
<=> x² + px + q = 0
x1/2 = -p/2 +/- W(p/2)² - q
spezielle Schreibweise
1. Fall
(p/2)² - q > 0
x1/2 = -p/2 +/- W(p/2)² - q
2. Fall
(p/2)² - q = 0
x1=x2 = -p/2
3. Fall
(p/2)² - q < 0
keine Lösung
x1
x2
Xs
Satz von Viëta
x1 + x2 = -p
x1 * x2 = q
Beweisbar über
Nullstellenschreibweise
f(x) = a(x-x1)(x-x2)
Umkehrfunktion zu Quadr. Parabeln
Umrechnung:
y = ax² + bx +c |-y
0 = ax² + bx + c-y |/a
0 = x² + b/ax + (c-y)/a
x1/2 = -b/a/2 +- W(b/a/2)² -(c-y)/a
Umbennen der Varaiablen:
y = -b/a/2 + W(b/a/2)² -(c-x)/a
oder
y = -b/a/2 - W(b/a/2)² -(c-x)/a
Beispielrechnung:
y = 2x²+ 4x + 4 |-y
0 = 2x²+ 4x + 4 - y |/2
0 = x² + 2x + (4 - y)/2
x1/2 = -1 +- W1² - (4 - y)/2
Umbennen der Variablen:
y = -1 + W1² -2 + y/2
oder
y = -1 - W1² -2 + y/2

Mathematik

Quadratische Parabeln

$P(x_P|y_P)$

$f(x_P)=y_P$

"a"

$|a|=1$ … gegenüber der Normalparabel gleich

$a<|a|<1$ … gegenüber der Normalparabel gestaucht

$a<0$ nach unten geöffnet

$a>0$ nach oben geöffnet

$a>1$ … gegenüber der Normalparabel gestreckt

Graph ← benötigt man für

Scheitelpunktsform

$f(x) = a(x-x_s)^2 + y_s$

x_s = "umgekehrtes" Vorzeichen

y_s = "gleiches" Vorzeichen

$a(x-7)+3$

$\Rightarrow S(7|-3)$

$S(x_s|y_s)$

$\Rightarrow$ höchster oder tiefster Punkt

$2(x-1)^2+3$

$2(x^2-2x+1)+3$

$2x^2-4x+5$

o. ausklammern + quadr. Ergänzung

allgemeine Form

$f(x) = ax^2+bx+c$

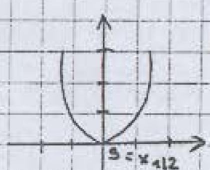
Schnittstelle mit der x-Achse

Nullstellen

3 Fälle

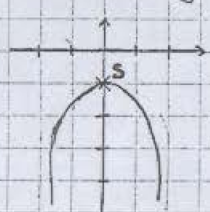
$\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q = 0$

1 Lös.: $x_{1/2} = -\frac{p}{2}$



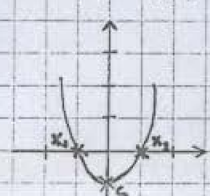
$\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q < 0$

keine Lösung



$\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q > 0$

2 Lös.: $x_{1/2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}$



by Lennart

Mathematik

Quadratische Parabeln

"a"

$|a| = 1$
... gegenüber der Normalparabel gleich

$a < 0$
nach unten geöffnet

$a < |a| < 1$
... gegenüber der Normalparabel gestaucht

$a > 0$
nach oben geöffnet

$a > 1$
... gegenüber der Normalparabel gestreckt

Graph ← benötigt man für

Scheitelpunktsform
$f(x) = a(x - x_s)^2 + y_s$

x_s = "umgekehrtes" Vorzeichen
y_s = "gleiches" Vorzeichen
$a(x - 7) + 3$
$\Rightarrow S(7|3)$

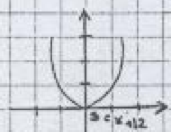
$S(x_s|y_s)$
=> höchster oder tiefster Punkt

$2(x-1)^2 + 3$
$2(x^2 - 2x + 1) + 3$
$2x^2 - 4x + 5$

allgemeine Form
$f(x) = ax^2 + bx + c$

"a" ausklammern + quadr. Ergänzung

$P(x_p|y_p)$
$f(x_p) = y_p$

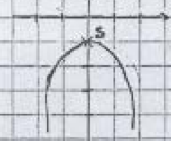


Nullstellen
3 Fälle

Schnittstelle mit der x-Achse

$\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q = 0$
1 Lös.: $x_{1/2} = -\frac{p}{2}$

$\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q < 0$
keine Lösung



$\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q > 0$
2 Lös.: $x_{1/2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}$
=> P-Q-Formel

Bestimmen einer Umkehrfunktion

=> 1) Scheitelpunktsform
2) $(x_s|y_s)$
3) rechten oder linken Ast auswählen

rechts: $\mathbb{D}_f = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq x_s\}$

links: $\mathbb{D}_f = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leq x_s\}$

=> $\mathbb{W}_f$ angeben (egal ob links od. rechts!)

falls die Parabel nach oben geöffnet ist, also: $a > 0$!
$\Rightarrow \mathbb{W}_f = \{y \in \mathbb{R} \mid y \geq y_s\}$

falls die Parabel nach unten geöffnet ist, also: $a < 0$!
$\Rightarrow \mathbb{W}_f = \{y \in \mathbb{R} \mid y \leq y_s\}$

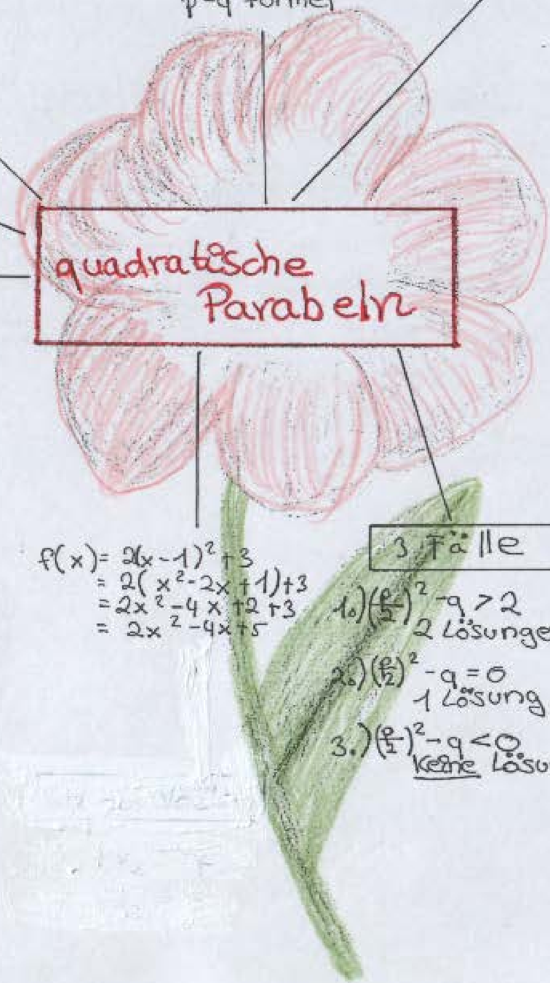
beim linken Ast ein (-) vor den Betrag beim rechten Ast ein (+).

4) Funktionsgleichung nach x - auflösen

5) Umbenennen der Variabelen

6) $\mathbb{D}_{f^*}$ & $\mathbb{W}_{f^*}$ angeben $\Rightarrow \mathbb{D}_f = \mathbb{W}_{f^*} \mid \mathbb{W}_f = \mathbb{D}_{f^*}$!

Satz von Vieta
$x_1 + x_2 = -p$
$x_1 \cdot x_2 = q$



quadratische Parabeln

Nullstellen

$f(x) = 0$

$\iff ax^2 + bx + c = 0 \quad | : a$

$\iff x^2 + \underbrace{\tfrac{b}{a}}_{p} \cdot x + \underbrace{\tfrac{c}{a}}_{q} = 0$

$\Downarrow$

p-q Formel

p-q Formel

$x_{1/2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}$

Satz des Vieta

$x_1 + x_2 = -p$

$x_1 \cdot x_2 = q$

Formen

Scheitelpunktsform

$f(x) = a(x - x_S)^2 + y_S$

$S(x_S / y_S)$

allg. Form

$f(x) = ax^2 + bx + c$

von allg. Form zu Scheitelpunktsform:

$f(x) = 3x^2 + 6x - 15$

$= 3(x^2 + 2x \quad) - 15$

$= 3(\underbrace{x^2 + 2x + 1^2}_{a^2 \; 2ab \; b^2}) - 15 - 3$

$= 3\underbrace{(x+1)^2}_{(a+b)^2} - 18$

1.) Koeffizient von x^2 ausklammern.

2.) Quadrat. Ergänzung in der Klammer hinzufügen (Nimm die Zahl vor dem x teile sie durch 2 und quadriere sie wieder) und hinten wieder abziehen.

3.) B' nom schreiben.

von SF zu a.F $\rightarrow$

$f(x) = 2(x-1)^2 + 3$

$= 2(x^2 - 2x + 1) + 3$

$= 2x^2 - 4x + 2 + 3$

$= 2x^2 - 4x + 5$

3 Fälle

1.) $\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q > 0$ 2 Lösungen

2.) $\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q = 0$ 1 Lösung

3.) $\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q < 0$ Keine Lösung

Fallunterschiede

1.) $f(x) = x^2$ Normalparabel

2.) $f(x) = \underbrace{x^2 + 3}$ ↑ 3 Einheiten

3.) $f(x) = \underbrace{x^2 - 1}$ ↓ 1 Einheit

4.) $f(x) = \underbrace{(x+3)^2}$ ← 1 Einheit

5.) $f(x) = \underbrace{(x-1)^2}$ → 1 Einheit

6.) $f(x) = \underbrace{2x^2}$ Streckung

7.) $f(x) = \underbrace{\tfrac{1}{2}} \cdot x^2$ Stauchung

8.) $f(x) = \underbrace{(x-2)^2}_{\rightarrow 2\,E.} \underbrace{-3}_{\downarrow 3 \text{ Einheiten}}$

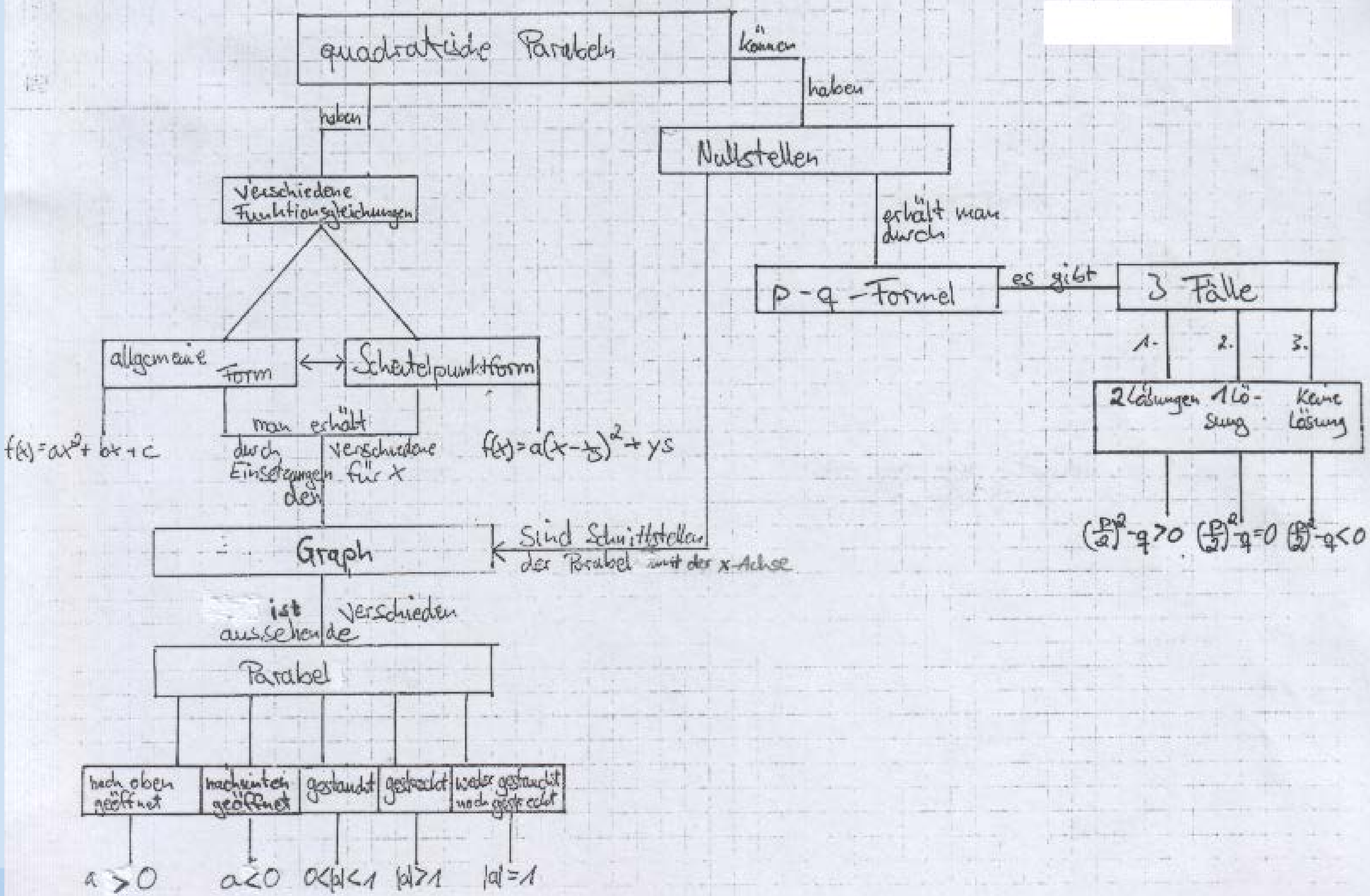
$a > 0$: Parabel nach oben geöffnet.

$a < 0$: " " unten " .

$0 < |a| < 1$: Parabel gegenüber der NP gestaucht.

$0 > |a| > 1$: " " " " gestreckt

$|a| = 1$: Parabel gegenüber der NP weder gestaucht noch gestreckt


quadratische Parabeln
können haben
haben
Nullstellen
verschiedene Funktionsgleichungen
erhält man durch
p-q-Formel
es gibt
3 Fälle
1.
2.
3.
2 Lösungen
1 Lösung
keine Lösung
$\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q > 0$
$\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q = 0$
$\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q < 0$
allgemeine Form
Scheitelpunktform
$f(x) = ax^2 + bx + c$
$f(x) = a(x - x_S)^2 + y_S$
man erhält durch Einsetzen verschiedener Werte für x den
Graph
sind Schnittstellen der Parabel mit der x-Achse
ist verschieden aussehende
Parabel
nach oben geöffnet
nach unten geöffnet
gestaucht
gestreckt
weder gestaucht noch gestreckt
$a > 0$
$a < 0$
$0 < |a| < 1$
$|a| > 1$
$|a| = 1$

Quadratische Parabeln

Formen

Scheitelpunktsform

$a(x - x_s)^2 + y_s$

$S(x_s | y_s)$

Binom

Allgemeine Form

$f(x) = ax^2 + bx + c$

Beispiele:

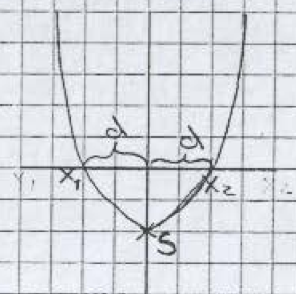
$a > 0$ = nach oben

$a < 0$ = nach unten

$0 < |a| < 1$ = gestaucht

$0 < |a| > 1$ = gestreckt

$0 < |a| = 1$ = weder gestaucht noch gestreckt



Nullstellen

$f(x) = 0$

$\Leftrightarrow ax^2 + bx + c = 0 \quad |:a$

$\Leftrightarrow x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = 0$

$x_1 / x_2 = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}$

2, wenn $\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q > 0$

1, wenn $\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q < 0$

0, wenn $\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q < 0$

Satz von Vieta

$x_1 + x_2 = -p$

$x_1 \cdot x_2 = q$

$a(x - x_1)(x - x_2)$

$= a(x^2 - x - x_1 - x_2 + x_1 \cdot x_2)$

$= a(x^2 \underbrace{(x_1 + x_2)}_{-p} \cdot x + \underbrace{(x_1 \cdot x_2)}_{q})$

$= ax^2 + px + q$

3.4 Abgewandelte Map-Formen

Beispielmaps: Anwendungen im MU

- **zusammenfassende Wiederholung und Strukturierung von Lerninhalten**
- **falsche Verknüpfungen eines Lernenden werden sichtbar und können korrigiert werden**
- **Hilfe beim Problemlösen**

Thema quadratische Gleichungen z. B. :

1) S(-2; 5), $x_1 = -4$, f(x) = ?

2) a = 2, $x_1 = -1$, $x_2 = 3$, f(x) = ?, S = ?

3.5 Diskussion, offene Fragen, Ausblick

- Besser angepasste graphische Darstellungen speziell für den MU
  - Regeln
  - Einführung im Unterricht
- Liste von Relationen (verbindenden Wörtern) erstellen
- Ist es sinnvoll einen Fundus von „Mastermaps“ bereitzustellen (für L/S)?
- Maps, die mehrere Themen verbinden – wie?
- Kann es eine Hilfe sein, Arbeitsschritte/Gedanken/… während eines Problemlösungsprozesses in Maps festzuhalten? – Situationen, Beispiele
- …

4. GDM-AK
Vernetzungen im MU

AK zu Vernetzungen im MU

- **1. Tagung: 23. – 24. Okt. 2009 in Dortmund**
- **2. Tagung: 30. April – 01. Mai 2010 in Linz**
- **Herausgabe einer Schriftenreihe**
  „Materialien für einen vernetzenden MU“

Seite für Mathematik-Vernetzungen:

www.math-edu.de

Danke für Ihre Aufmerksamkeit

Astrid Brinkmann

http://www.math-edu.de

astrid.brinkmann@math-edu.de